目　录

第 1 章　抛物线 …… 1
第 2 章　正射影 …… 28
第 3 章　椭圆 …… 34
第 4 章　双曲线 …… 77
第 5 章　直角双曲线 …… 123
第 6 章　圆柱面和圆锥面的截线 …… 124
第 7 章　补充命题 …… 141
第 8 章　问题 …… 145
附录 A …… 186
附录 B　蝴蝶问题的演变(L·班可夫) …… 193
附录 C　圆锥曲线小史(白尚恕) …… 221
索引 …… 234

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

第1章 抛 物 线

定义 1. 抛物线是到一定点(S)的距离等于到一定直线(XM)的距离(PM)的点(P)的轨迹,

$$(SP = PM).$$

2. 定点(S)叫做焦点.

3. 定直线(XM)叫做准线.

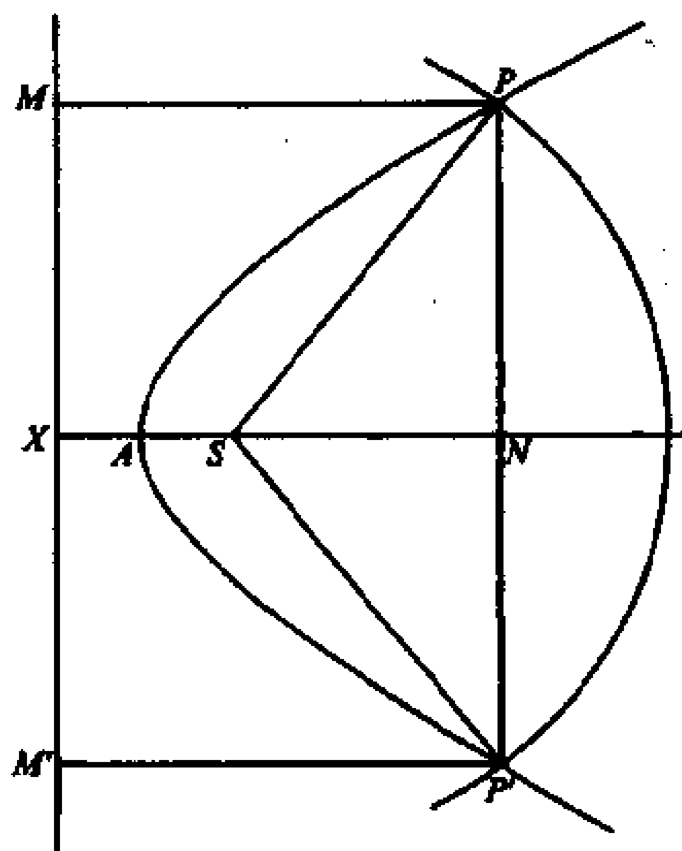


图 1-1

定义　一条曲线被称为关于一条直线对称，如果对应于曲线上的任一点，总存在这曲线上另外一点，使这两点位于直线异侧，并且连结它们的弦被这直线垂直平分.

定义　上面这条直线叫做曲线的*轴*.

【1】 **定义**　曲线与它的轴的交点叫做*顶点*.

课题 1

作抛物线上的点，并且证明过焦点所作准线的垂线是抛物线的对称轴.

[解]　[如图 1－1，]设 S 是焦点，MXM' 是准线. 过 S 作直线 SX 垂直于准线，并将垂线沿 XS 方向延长.

【2】 平分 SX 于点 A. 那么由于 $SA = AX$，A 是抛物线上一点.

在线段 XS 或 XS 的延长线上任取一点 N；过 N 作直线 PNP' 垂直于 XN；以 S 为圆心、XN 为半径作圆，（如果能）与 PNP' 相交，设交点为 P 和 P'；作 PM，$P'M'$ 垂直于准线. 那么由于

$$SP = NX = PM,$$

所以 P 是抛物线上的一个点.

类似地，P' 也是抛物线上的点.

由于

$$NP = NP', \quad (\text{Euc. III. 3.})①$$

PP' 总是被 XS 垂直平分，因而曲线关于 XS 对称.

[下面考虑作图过程中的圆与直线在什么场合相交，什么场合不相交.]

(1) 若 N 与 S 在 A 点同侧，则 SN 小于 NX，因而圆与直线 PNP' 相交.

---

① 译者注：括号中的“Euc. Ⅲ. 3.”表示论证理由见欧几里得《几何原本》第 3 卷问题 3，其余类推.

(2) 若 N 与 S 在 A 点异侧,则圆与直线 PNP' 无公共点.

所以,抛物线无限伸展,但是整个抛物线都在过 A 且垂直于 AS 的直线的一侧.

练习问题见第 6 页.

定义 通过焦点垂直于准线的直线(SX)叫做抛物线的轴.

定义 抛物线的轴与曲线的交点(A)叫做抛物线的顶点.

定义 抛物线上一点(P)到轴的垂直线段(PN)叫做这个点的纵标线.

定义 轴在顶点和纵标线之间的部分(AN)叫做横标线.

定义 抛物线上一点到焦点的距离(SP)叫做焦半径.

[**定义** 通过焦点的弦叫做焦点弦.] [3]

命题 2

若[抛物线的]弦 PP'[延长后]交准线于 K,则 SK 平分 SP 与 SP' 夹角的外角.

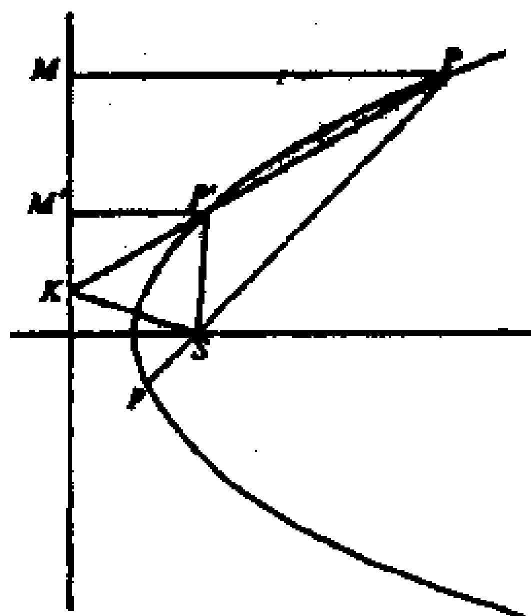


图 1-2

[证明]　连结 SP，SP'．

作 PM，$P'M'$垂直于准线，并且延长 PS 到 p．

那么由相似三角形 PKM，$P'KM'$得到

$$PK:P'K=PM:P'M'=SP:SP',$$

[4] ∴　SK 平分外角$\angle P'Sp$．（Euc．Ⅳ．A．）

命题 3

若 PN 为抛物线上一点 P 的纵标线，则

$$PN^2=4AS\cdot AN.$$

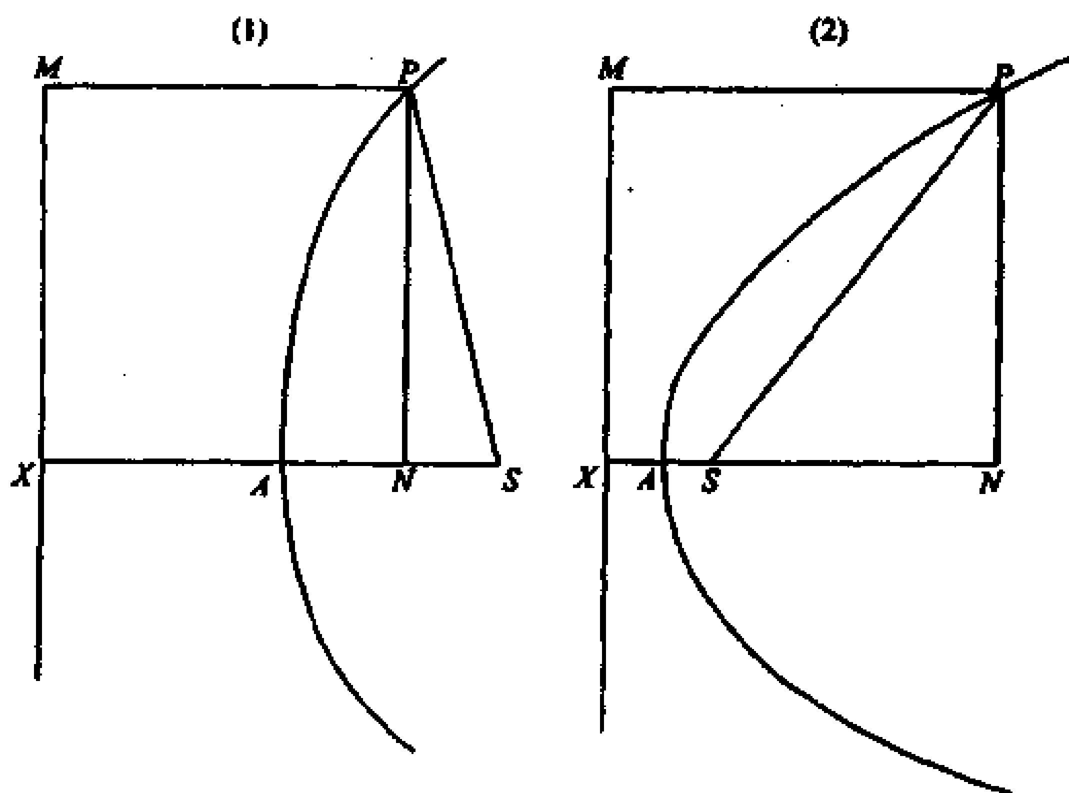


图 1-3

[证明]　连结 SP，作 PM 垂直于准线．那么

$NX^2=(XA+AN)^2$

$\quad=XA^2+AN^2+2XA\cdot AN$　（Euc．Ⅱ．4．）

$= AS^2 + AN^2 + 2AS \cdot AN$

$= (AS - AN)^2 + 2AS \cdot AN + 2AS \cdot AN$ （Euc. Ⅱ. 7.）

$= SN^2 + 4AS \cdot AN.$

但是

$$NX^2 = PM^2 = SP^2 = PN^2 + SN^2,$$

$$\therefore \quad PN^2 + SN^2 = SN^2 + 4AS \cdot AN;$$

$$\therefore \quad PN^2 = 4AS \cdot AN. \qquad [5]$$

[**定义** 设 P 和 P' 是抛物线上互相对称的两点，那么线段 PP' 叫做抛物线的一条双纵标线.]

定义 通过焦点的双纵标线（LL'）叫做正焦弦.

命题 4

正焦弦 $LL' = 4AS$.

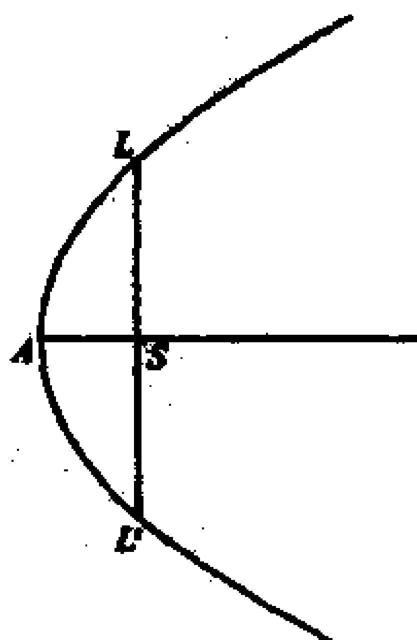


图 1-4

[证明] $\because \quad SL^2 = 4AS \cdot AS$，（命题 3）

$$\therefore \quad SL = 2AS;$$

【6】 $\therefore \quad LL' = 4AS.$

问　　题

[以下若无特别说明，S 总是表示焦点，A 总是表示顶点．各题中未说明意义的字母可参考相应命题的图形．]

课题 1

1．利用欧几里得《几何原本》第 1 卷问题 23 作点，从而画出抛物线．

2．设 PP'，QQ' 是抛物线的双纵标线．求证：PQ，$P'Q'$ 相交于轴上同一点．

3．[如图 1－1，]若 SM 与过 A 点平行于准线的直线相交于 Y，求证：SM 被 Y 点平分．

4．再证明：PY 垂直于 SM，并且平分 $\angle SPM$．

5．作 SZ 垂直于 SP，交准线于 Z．求证：PZ 平分 $\angle SPM$．

6．设抛物线的两条焦点弦相等，那么连结它们中点的直线垂直于轴．

7．设动圆与一条已知直线相切，并且通过一个已知点，求圆心的轨迹．

8．设动圆与一定圆及一定直线同时相切，求动圆圆心的轨迹．

9．平行于轴的直线，与抛物线只有一个公共点．

命题 2

1．设 Pp 是抛物线的一条焦点弦，Q 是曲线上另外一点．若 PQ，pQ 分别交准线于 K 和 K'，则 $\angle KSK'$ 是直角．

2．设 PQ，pq 是焦点弦．求证：Pp 与 Qq 的交点在准线上，Pq 与 pQ 的交点也在准线上．

3．设上题中与准线的交点为 K 和 K'，则 $\angle KSK'$ 为直角．

4．利用命题 2，通过将 A 点与准线上不同点相连，画抛物线．

5．设 P 是抛物线上任一点．若 PA 延长后交准线于 K，则 $\angle MSK$ 为直角．

6．已知抛物线及其焦点，求准线．

7．设 PQ 是抛物线的双纵标线，PX 交曲线于 P'[其中 X 是轴与准线的交点]．求证：$P'Q$ 通过焦点．

命题 3

1. 设 PP' 是抛物线的一条双纵标线.若三角形 PAP' 的外接圆与轴再相交于点 Q,证明 NQ 为定长,并求其长度.

2. 设 PNP' 是抛物线的一条双纵标线.又设 Q 为抛物线上另一点,过 Q 作两条直线,一条通过顶点,另一条平行于轴,分别交 PP' 于 L 和 L'.求证:$NL\cdot NL'=PN^2$.

命题 4

1. 在抛物线中,作一条双纵标线 PP',使它是正焦弦的 2 倍.

2. [如图 1-4,]三角形 LAL' 的外接圆半径等于正焦弦长的$\frac{5}{8}$. [7]

定义 设 PP' 是一条曲线的弦.若 P' 点向 P 移动,则当 P' 与 P 重合时,弦 PP' 的极限位置叫做 P 点处的切线.

命题 5

设[抛物线]在点 P 的切线交准线于 Z.那么$\angle PSZ$ 是直角,并且 P 点处的切线平分由焦半径 SP 和垂直于准线的直线 PM 所成的角;顶点处的切线与轴相交成直角.

[证明] 设在命题 2 的图中,弦 $PP'K$ 的点 P'[沿曲线]移动到 P,使弦变成切线 PZ[图 1-5a].那么在极限位置上,SK 与 SZ 重合,SP' 与 SP 重合,并且$\angle P'Sp$ 成为二直角;但是$\angle P'SK$总是等于$\angle P'Sp$的一半(命题 2),所以$\angle PSZ$ 是二直角的一半,即$\angle PSZ$ 为直角. [8]

作 PM 垂直于准线,则

$$PM^2+MZ^2=PZ^2\quad(\text{Euc. I. 47.})$$
$$=SP^2+SZ^2.$$
$$\because\quad PM=SP,\quad\therefore\quad MZ^2=SZ^2.$$
$$\therefore\quad MZ=SZ;$$

在三角形 ZPM,ZPS 中,PM,MZ 分别等于 PS,SZ,而 PZ 是公共边,所以

$$\angle MPZ=\angle SPZ.\quad(\text{Euc. I. 8.})$$

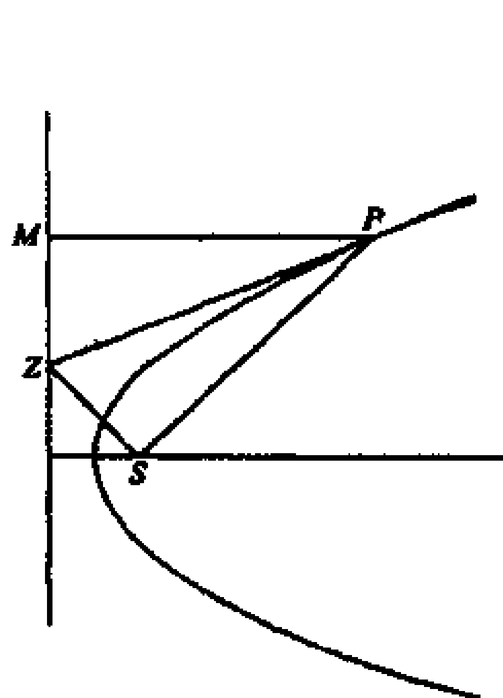


图 1-5a

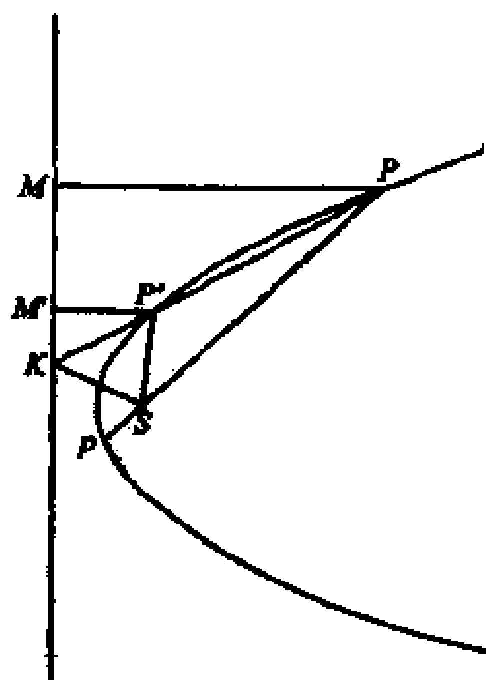


图 1-5b

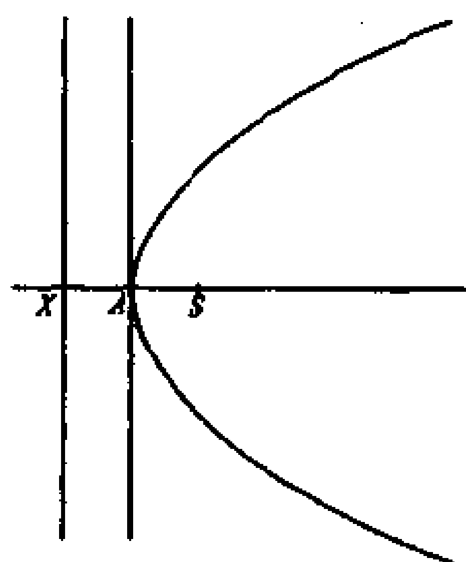


图 1-5c

若点 P 在顶点 A 处[如图 1-5c],则$\angle SPM$ 等于二直角,因而与平角$\angle SAX$ 重合.顶点处的切线平分这个角,因而与轴成直角.

问 题

利用抛物线的定义证明：平分∠*SPM* 的直线与抛物线不可能有第二个公共点.

补充练习问题见第 10 页. [9]

命题 6

[抛物线]焦点弦两端的切线相交成直角，且交点在准线上.

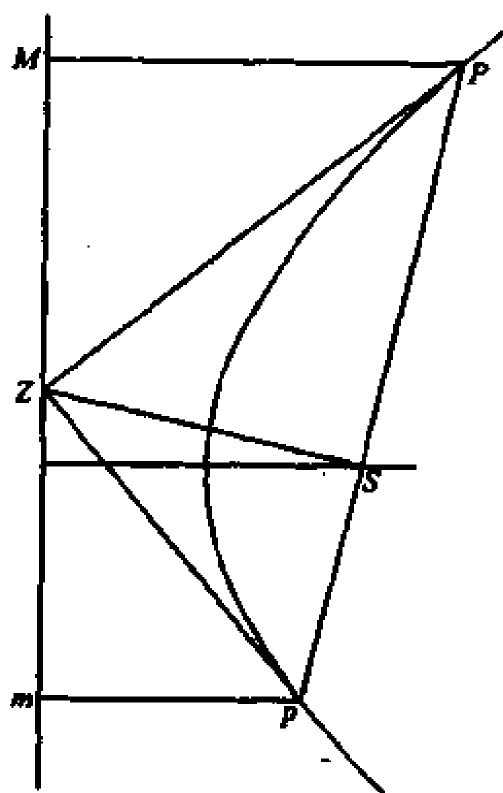


图 1－6

[证明] 设 *PSp* 是一条焦点弦[如图 1－6]，并设 *P* 点的切线交准线于 *Z*.

连结 *ZS*，*Zp*，并作 *PM*，*pm* 垂直于准线. 那么 [10]

∵ *PZ* 是 *P* 点处的切线，

∴ *SZ* 与 *PSp* 成直角；（命题 5）

∴ *pZ* 是 *p* 点处的切线.

又∵　$\triangle SPZ \cong \triangle MPZ$，（Euc. Ⅰ. 4.）

∴　$\angle SZP = \angle PZM$；

∴　$\angle SZP$ 是$\angle SZM$ 的一半.

类似地，$\angle SZp$ 是$\angle SZm$ 的一半.

∴　$\angle PZp$ 是$\angle SZM$ 与$\angle SZm$ 之和的一半，即二直角的一半.

∴　$\angle PZp$ 为直角.

问　　题

命题 5

1. [求证：抛物线在]正焦弦两端的切线交准线于点 X.[这里 X 是轴与准线的交点.]

2. 若在[抛物线上一]点 P 处的切线上任取点 O，则 $OM = OS$.

3. 若抛物线在其点 P，P' 的切线交于点 O，且 PM，$P'M'$ 分别是从 P，P' 到准线的垂线，则 OM、OS，OM' 都相等.

由此导出从抛物线外一点 O 作两条切线的画法.

4. 若 OQ，OQ' 是抛物线的两条切线[Q 和 Q' 是切点]，V 是 QQ' 的中点，则 OV 平行于轴.

5. 因此，[利用上题结果，]已知抛物线的两条切线和它们的切点，求焦点.

6. 如果[抛物线在其]点 P 的切线与正焦弦的延长线相交于 K，与准线相交于 Z，那么 $SK = SZ$.

命题 6

1. 若焦点弦 PP_1 两端的切线交于 Z，且 PM，P_1M_1 是到准线的垂线，求证：MM_1 被 Z 点平分. 由此证明，以 PP_1 为直径的圆与准线相切于 Z.

2. 设 PSQ 是一条焦点弦. QG 垂直于 Q 点的切线，交轴于 G. GZ 垂直于 P 点的切线. 求证：Z 在正焦弦上.

[11] 3. 一条焦点弦两端的切线在正焦弦上截得等长的截距.

定义　在曲线上任一点所作垂直于该点处切线的直线叫做

法线.

命题 7

如果[抛物线在其]点 P 处的切线、法线分别交轴于 T 和 G,那么 $SG=SP=ST$.

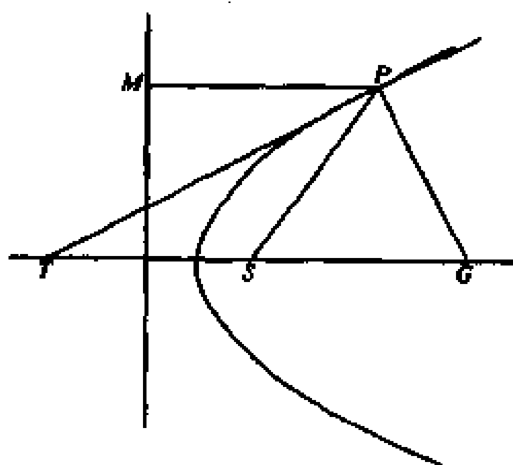


图 1-7

[证明] 作 PM 垂直于准线,则

$$\angle STP=\angle MPT \quad (\text{Euc. I. 29.})$$
$$=\angle SPT,(\text{命题 } 5)$$
$$\therefore \quad SP=ST.$$

又因为$\angle TPG$ 是直角,所以圆心为 S、半径为 SP 或 ST 的圆通过 G(Euc. Ⅲ. 31.);

$$\therefore \quad SG=SP=ST.$$

问　　题

1. 证明 SM 和 PT 互相垂直平分[如图 1-7].

2. 若 T 是 AX 的中点,则 N 是 AS 的中点[其中 A 是抛物线的顶点,X 是轴与准线的交点,N 是切点 P 到轴所作垂线的垂足].

3. 如果三角形 SPG 是等边的,那么$\angle TMG$ 是直角.

4. 四边形 $SPMZ$ 有外接圆,且此圆切 PG 于 P[Z 是 PT 与准线的交

点].

5. 若上题中的圆半径等于 MZ，则三角形 SPG 是等边的.

6. 抛物线的任意两条切线的夹角，等于切点弦对于焦点的张角的一半.

7. 已知三角形 ABC 的底边 AB[的大小、位置]和角 C[的大小].求与 CA、CB 分别相切于 A 和 B 的抛物线的焦点的轨迹.

8. 已知两条抛物线有相同的焦点，并且它们的轴在同一直线上，但
【12】方向相反.求证：它们相交成直角[即交点处两曲线的切线成直角].

定义 若在点 P 处的切线和纵标线分别交轴于 T 和 N，则 NT 叫做点 P 的次切线.

命题 8

次切线 $NT = 2AN$.

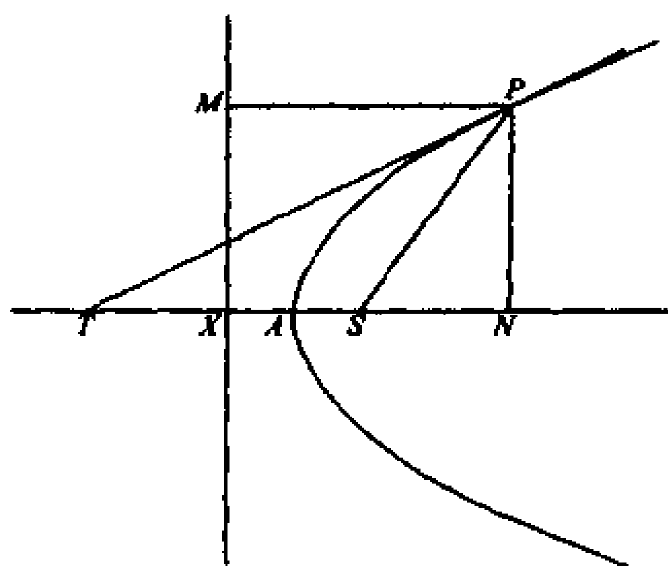


图 1-8

[证明] 作 PM 垂直于准线，则

$$\begin{aligned} ST &= SP \quad (\text{命题 } 7) \\ &= PM \\ &= XN; \end{aligned}$$

又因为

$$AS = AX,$$

$$\therefore \quad AT = AN;$$

$$\therefore \quad NT = 2AN.$$

问　　题

1. 若 R 为三角形 PNT 的外接圆半径,求证:$R^2 = SP \cdot AN$.

2. 从[已知抛物线的焦点]S 作直线 SQ,使它平行于 P 点处的切线;过 P 作平行于轴的直线 PE,交 SQ 于 E.求证:E 点的轨迹是一条抛物线,其顶点为 S,正焦弦等于原抛物线正焦弦的$\frac{1}{2}$. 【13】

定义　如果在点 P 的法线和纵标线分别交轴于点 G 和 N,那么 NG 叫做 P 点处的次法线.

命题 9

次法线 $NG = 2AS$.

[证明]　作 PM 垂直于准线,则

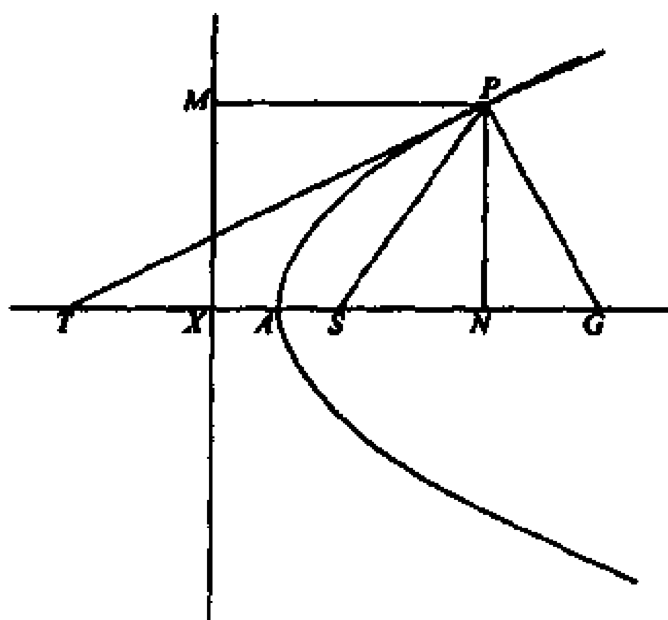


图 1-9

$$
\begin{aligned}
SG &= SP \quad (\text{命题 } 7)\\
&= PM\\
&= XN;\\
\therefore\quad NG &= SX\\
&= 2AS.
\end{aligned}
$$

问　　题

1. 如果 SPG 是等边三角形，那么 SP 等于正焦弦.
2. 从命题 8 和命题 9 推导命题 4.
3. 作曲线[抛物线]在任一给定点的法线.
4. 如果[抛物线上一点] Q 的纵标线 QM 平分 NG，求证：$QM = PG$.
5. 设 TP，TQ 是已知圆的切线. 求作一条抛物线，使它与 TP 相切于
【14】 P，并且以 TQ 为轴.

命题 10

若[抛物线在其]任一点 P 的切线交顶点处的切线于 Y，则 SY 垂直平分 PT，且 SY 是 SA 与 SP 的比例中项（$SY^2 = AS \cdot SP$）.

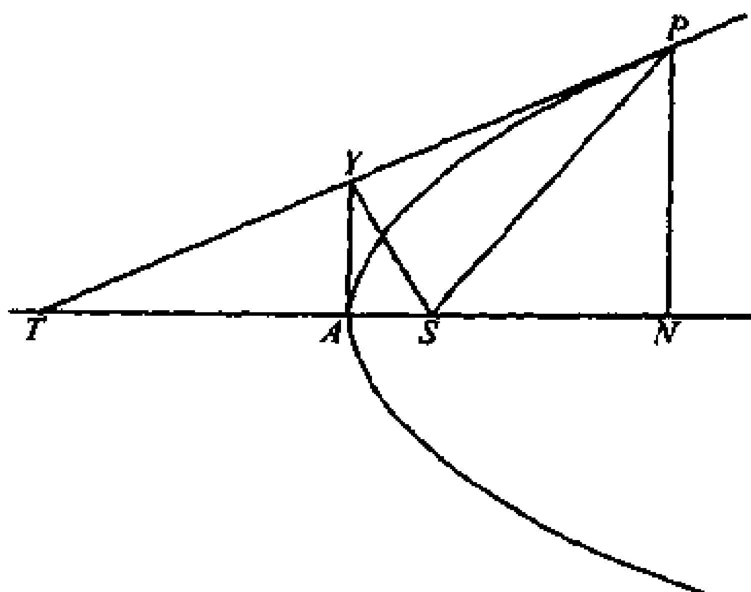


图 1－10

[证明] 连结 SP,作 PN 垂直于轴.那么[根据命题 8],TN 被 A 点平分,并且 AY 平行于 PN,

$$\therefore \quad PT \text{ 被 } Y \text{ 点平分}.$$

[又由命题 7 知 $ST = SP$,]

$$\therefore \quad SY \perp PT.$$

进而,因为 YA 是直角三角形 SYT 斜边 ST 上的高,

$$\therefore \quad SY^2 = SA \cdot ST \quad (\text{Euc. IV. 8.})$$
$$= SA \cdot SP. \quad (\text{命题 7})$$

问 题

1. [如图 1-10,求证:]以 SP 为直径的圆与顶点处的切线相切于 Y.

2. 求证:$PY \cdot PZ = SP^2$.[Z 是切线 PT 与准线的交点,见图 1-6.]

3. 求证:$PY \cdot YZ = AS \cdot SP$.

4. 求证:SY 的延长线与准线[恰好]相交于点 M.[参考图 1-10 和 1-9.]

5. 如果一个圆以抛物线的正焦弦为直径,并且 PQ 是这条抛物线与圆的公切线,切点分别为 P 和 Q,求证:SP,SQ 都与正焦弦成 30°角.

6. 已知抛物线的两条切线和焦点,说明怎样作这条抛物线在顶点处的切线,然后再作出它的轴和准线.

7. 折叠一张矩形长纸条,使它的一角总是落在一条对边上.求证:这些折痕总是与一条抛物线相切,抛物线的准线就是这条对边. [15]

命题 11

如果从[抛物线在]P 点处的切线上任意一点 O 作 OI 垂直于准线,OU 垂直于 SP[垂足分别为 I 和 U],那么 $SU = OI$.
(亚当斯(Adams)性质)

[证明] 连结 SZ,并作 PM 垂直于准线[垂足为 M].

那么,因为角 ZSP 是直角[命题 5],

$$\therefore \quad ZS \parallel OU.$$

$$\therefore \quad SU : SP = ZO : ZP$$

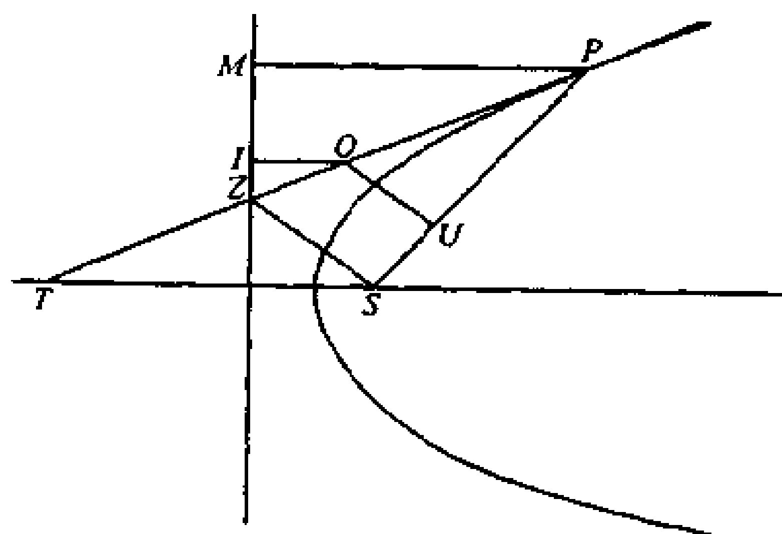


图 1-11

$$= OI : PM.$$

但是

$$SP = PM;$$

[16] $$\therefore \quad SU = OI.$$

作图题 12

从抛物线外一点 O 作抛物线的两条切线.

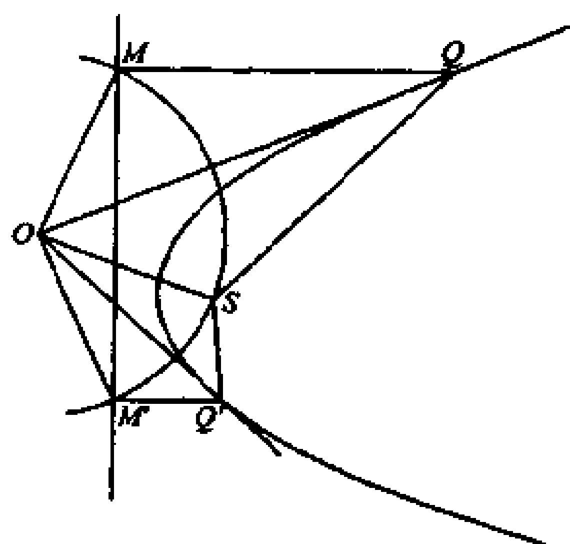


图 1-12

(**分析** 设 OQ，OQ'是两条切线.作 QM，$Q'M'$垂直于准线[垂足分别为 M，M']，连结 OS，OM，OM'.

那么，因为$\angle SQM$ 被 OQ 平分[命题 5]，所以三角形 SQO 与 MQO 全等(Euc. Ⅰ. 4.)，因而 $OM = OS$.

所以 $OM' = OS$.这样就求得点 M 和 M'，因此可作出所需图形.)

[作法] 以 O 为圆心、OS 为半径作圆，交准线于 M 和 M'.

从 M 和 M'分别作 MQ，$M'Q'$垂直于准线，交抛物线于 Q，Q'.

连结 OQ，OQ'，则 OQ，OQ'就是所求的切线.

[证明] 连结 OS，OM，OM'，SQ，SQ'.

那么，在三角形 SQO 和 MQO 中，

$$SQ = MQ, QO = QO, OM = OS,$$

$$\therefore \quad \angle SQO = \angle MQO.$$

$\therefore$ OQ 是在 Q 点的切线. (命题 5)

依同理，OQ'是在 Q'点的切线.

注：也可利用命题 10 和命题 11 中证明的原理作图.

补充问题见本章末尾. 【17】

命题 13

[抛物线的]两条切线 OQ，OQ'从焦点[S]看时，张角相等，并且三角形 SOQ 与 $SQ'O$ 相似.

[证明] 作顶点处的切线，分别交 OQ，OQ'于 Y 和 Y'.

连结 SQ，SQ'，SY，SY'.

延长 QO，交轴于 T.

那么，因为在 Y 和 Y'处的角是直角(命题 10)，可知以 OS 为直径的圆通过 Y 和 Y'.因而

$$\angle SOQ' = \angle SYY' \quad \text{(同弧上的圆周角)}$$

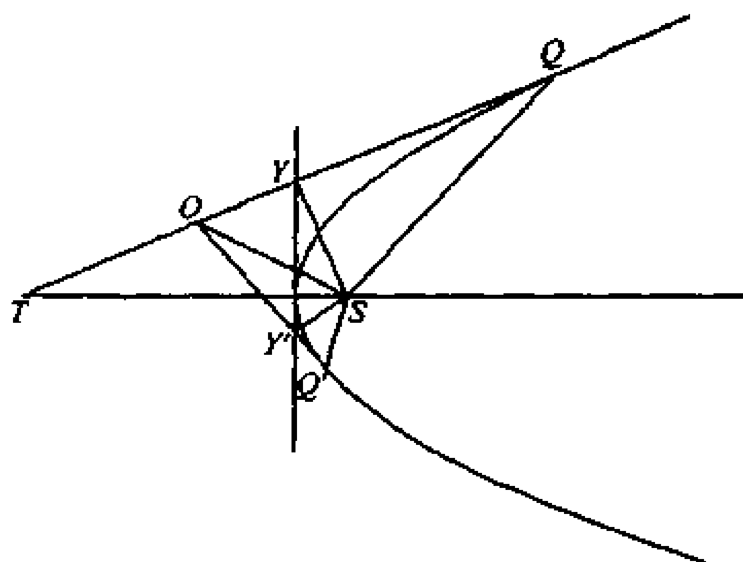


图 1-13

$= \angle STY$ （Euc. Ⅳ. 8.）

$= \angle SQO$. （命题 7 和 Euc. Ⅰ. 5.）

类似地，

$$\angle SOQ = \angle SQ'O.$$

所以三角形 SOQ 与 $SQ'O$ 相似.

问　　题

OS 与过 O 而平行于轴的直线所成的角，等于一条切线[OQ]与这平行线所成的角.

[18] 补充问题见本章末尾.

命题 14

如果作抛物线的一对切线 OQ，OQ'，并且作平行于轴的直线 OV，交 QQ' 于 V，那么 QQ' 被 V 点平分.

[证明] 设 OV 交准线于 R.

作 QM，$Q'M'$ 垂直于准线[垂足为 M 和 M'].

连结 OM，OS，OM'，SQ，SQ'.

那么，在三角形 SQO 和 MQO 中，

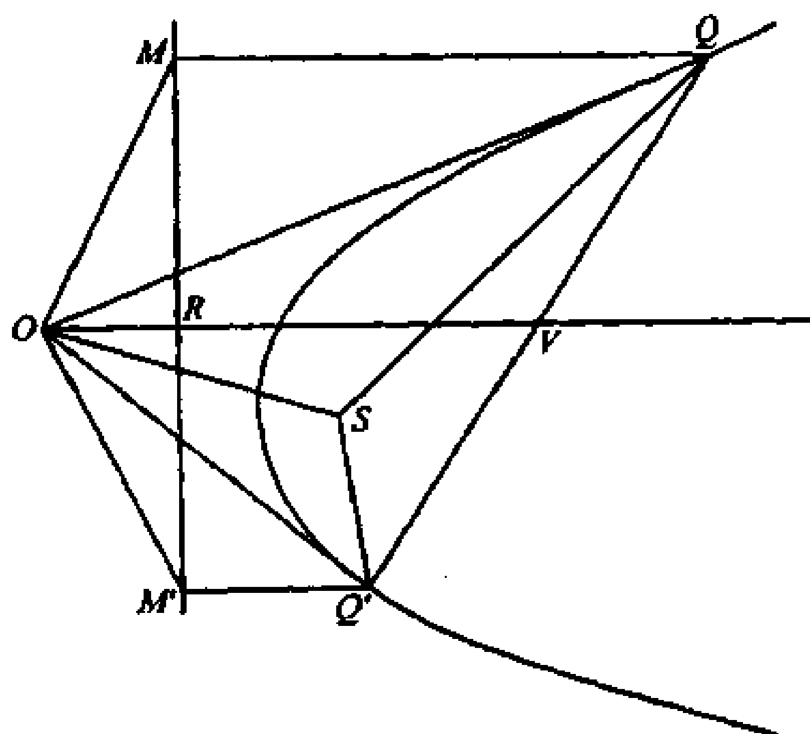


图 1-14

$$SQ = MQ, \quad QO = QO,$$

并且

$$\angle SQO = \angle MQO, \quad \text{(命题 5)}$$

$$\therefore \quad OM = OS.$$

类似地，

$$OM' = OS,$$

$$\therefore \quad OM = OM'.$$

又因为 OR 是等腰三角形 OMM' 底边上的高，必定平分底边，

$$\therefore \quad MR = M'R.$$

但是

$$QV : Q'V = MR : M'R,$$

$$\therefore \quad QV = Q'V,$$

即 QQ' 被 V 点平分.

补充问题见本章末尾. [19]

命题 15

抛物线的任意一组平行弦的中点的轨迹是一条平行于轴的直线，通过平行于这些弦的切线的切点.

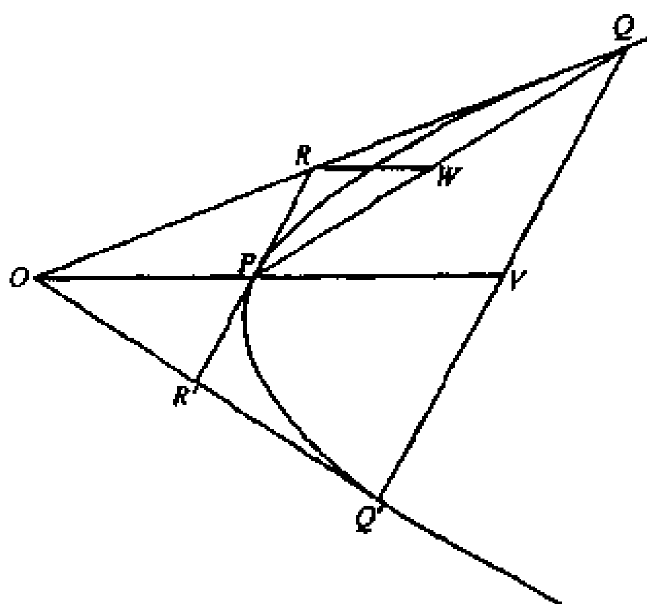


图 1－15

[证明] 设 RPR' 是平行于弦的切线，P 为切点，而 QQ' 是其中的一条弦.

过 P 作 OPV 平行于轴，交 QQ' 于 V，交切线 QRO 于 O. 连结 PQ，作 RW 平行于轴，则 PQ 被 W 平分(命题 14).

于是由 RW 平行于 OP，得 $OR = RQ$(Euc. Ⅳ. 2.)，再从 PR 平行于 QV，得 $OP = PV$.

类似地，如果作切线 $Q'R'O'$，交 OPV 于 O'，则 $O'P = PV$，因而 O 与 O' 重合.

因为 OQ，OQ' 是切线，并且 OV 平行于轴，所以 QQ' 被 V 点平分(命题 14).

所以，所有平行于 RPR' 的弦的中点都在过 P 而平行于轴

的直线上.

定义 在一条曲线中，一组平行弦的中点轨迹叫做直径.

注：刚刚证得的命题是对抛物线而言的.对于一般的曲线，“直径”可能不是直线.

补充问题见本章末尾. [20]

定义 夹在直径与曲线之间的半弦(QV)称为此直径的纵标线.

命题 16

若 QV 是直径 PV 的纵标线，且 Q 点处的切线交 VP 的延长线于 O，则 $OP=PV$.

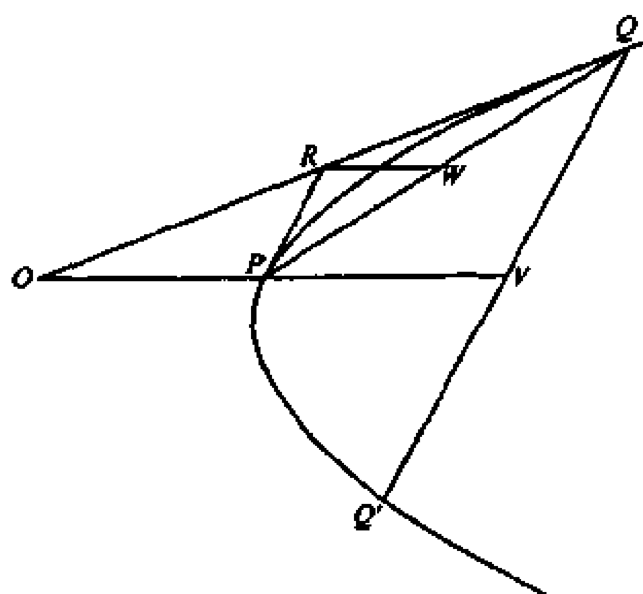


图 1-16

[证明] 作 PR 切抛物线于 P，交 OQ 于 R；过 R 作 RW 平行于轴.

因为 RP，RQ 是一对切线，所以

PQ 被 W 平分，（命题 14）

并且

$PR /\!/ QV$；（命题 15）

$\therefore \quad OP:PV = OR:RQ = PW:WQ.$

但是 $PW = WQ$，

[21] $\therefore \quad OP = PV.$

命题 17

若 QV 是直径 PV 的纵标线，则

$$QV^2 = 4SP \cdot PV.$$

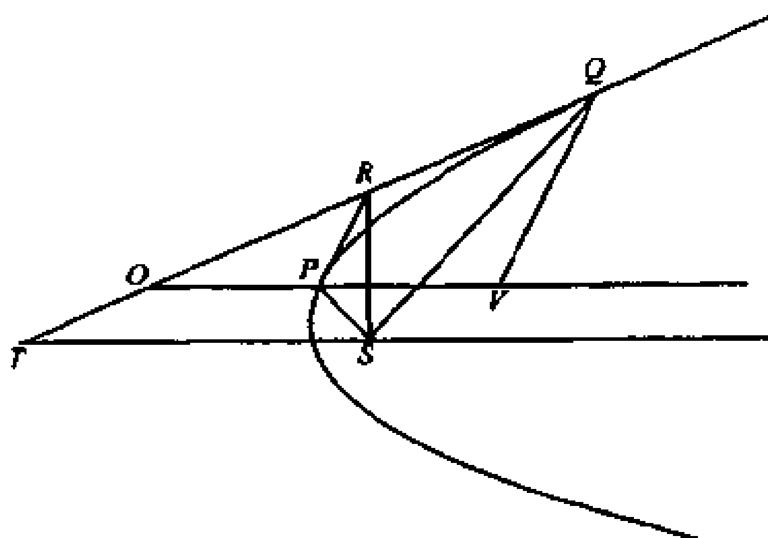


图 1－17

［证明］ 设直径 PV 交抛物线于 P.

作 Q 点处的切线，交直径于 O，交轴于 T.

作 P 点处的切线，交 OQ 于 R.

连结 SP，SR，SQ.

那么，因为 RP，RQ 是两条切线，

$\therefore$ 三角形 SRP 与 SQR 相似（命题 13）；

$\therefore \quad \angle SRP = \angle SQR$

$$=\angle STR \quad (\text{命题 } 7)$$

$$=\angle POR. \quad (\text{Euc. I. 29.})$$

又因为 P 点处的切线平分$\angle SPO$(命题 5),所以

$$\angle SPR=\angle OPR.$$

$$\therefore \quad \triangle SRP \backsim \triangle POR.$$

$$\therefore \quad PR^2=SP\cdot PO.$$

现在 OV 被 P 点平分(命题 16),

$$\therefore \quad QV=2PR.$$

$$\therefore \quad QV^2=4PR^2=4SP\cdot PO=4SP\cdot PV.$$

补充问题见本章末尾. [22]

命题 18

如果[抛物线的]焦点弦 QSQ' 被直径 PV 平分,其中 P 是与曲线的交点,[V 是与 QQ' 的交点,]那么 $QQ'=4SP$.

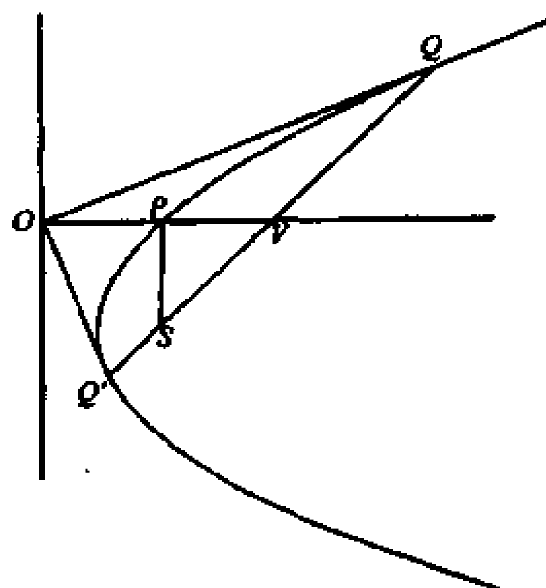


图 1-18

[证明] 作切线 OQ,OQ',则它们相交成直角,且交点[O]

在准线上(命题 6).

[根据命题 14,过切线交点 O 所作平行于轴的直线必过 QQ' 的中点 V,所以 O 点在直径 PV 上.]连结 SP.

那么,因为 OV 是直角三角形 QOQ' 斜边上的中线,

$$\therefore\quad QV = OV.\quad (\text{Euc. III. 31.})$$

$$\therefore\quad QQ' = 2OV.$$

但是

$$OP = SP,\quad (\text{抛物线的定义})$$

$$\therefore\quad OV = 2SP.\quad (\text{命题 16})$$

$$\therefore\quad QQ' = 4SP.$$

【23】 补充问题见本章末尾.

命题 19

若抛物线的两条弦 QQ',qq' 彼此相交,[设交点为 O,如图 1-19,]则以各弦被交点分成两段为边的长方形面积之比,等于

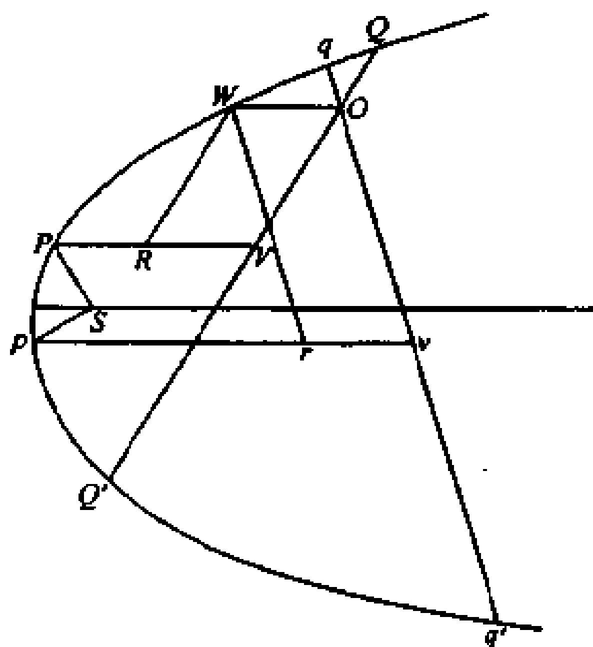


图 1-19

平行于它们的焦点弦的比，即

$$QO \cdot Q'O : qO \cdot q'O = 4SP : 4Sp.$$

[证明] 作直径 PV，平分 QQ' 于 V.

作 OW 平行于轴，交抛物线于 W.

作直径 PV 的纵标线 WR. 连结 SP. 那么

$$\begin{aligned} QO \cdot Q'O &= QV^2 - OV^2 \quad (\text{Euc. II. 5.}) \\ &= QV^2 - WR^2 \quad (\text{Euc. I. 34.}) \\ &= 4SP \cdot PV - 4SP \cdot PR \quad (\text{命题 16}) \\ &= 4SP \cdot RV \\ &= 4SP \cdot OW. \end{aligned}$$

类似地，

$$qO \cdot q'O = 4Sp \cdot OW;$$

$$\therefore \quad QO \cdot Q'O : qO \cdot q'O = 4SP : 4Sp.$$

补充问题见本章末尾. [24]

问　　题

命题 12

1. 如果[图 1－12 中的]点 O 在准线上，根据作法证明，两条切线相交成直角.

2. 求点 O，使[图 1－12 中的]图形 $OQSQ'$ 是平行四边形.

命题 13

1. [在图 1－13 中，]如果作第三条切线，交 OQ，OQ' 于 R 和 T，求证：三角形 ORT 的外接圆通过 S 点.

2. 与三条给定直线相切的抛物线的焦点的轨迹是什么？

3. 有一条抛物线，与四条定直线中的每一条都相切. 找一种几何作法来确定它的焦点.

4. 求证：[如图 1－13，]OS 是 OQ 与 OQ' 的比例中项. 前面哪一条性质是它的特殊情形？

5. 已知抛物线的两条切线和其中一条的切点. 求证：焦点的轨迹是一个圆，通过给定切点和这两条切线的交点，并与其中一条直线相

切.

6. 设[抛物线的]两条切线夹角$\angle QOQ'$的平分线交轴于R.求证:$SO = SR$.

命题 14

1. 以[抛物线]任一焦点弦为直径的圆必与准线相切.

2. [抛物线]焦点弦两端的法线相交于平分此弦的直径上.

3. 已知两条切线和它们的切点,求焦点和准线.

命题 15

1. [抛物线]所有平行弦两端切线的交点在同一直线上.

2. 一条抛物线画在纸上,求它的轴和准线.

3. 如果[抛物线的]一组弦与轴成45°角,那么它们的中点所在直线通过正焦弦的一端.

命题 17

1. [在图1-17中,]如果作QD垂直于OV[垂足为D],那么$QD^2 = 4AS \cdot PV$[其中A是抛物线的顶点].

2. 已知TPV是[抛物线]在点P的直径,QV是一条纵标线,QT是Q点处的切线,并设$QV = TV$.求证:T在准线上.

3. [如图1-17,]过V点任作一条弦LVL',设LM,$L'M'$是LL'作到直
【25】径PV上的纵标线.求证:$LM \cdot L'M' = QV^2$.

4. 从抛物线一条切线的切点作一条弦,再作一条平行于轴的直线,使它与切线、曲线和弦都相交,则此直线被截得两线段的比,等于弦被此直线分成两部分的比.

5. 过已知点作抛物线的一条弦,使它被这个点分成给定的比.

命题 18

1. 作[抛物线的]一条焦点弦PSQ,使$SP = 3SQ$.

2. 如果[抛物线的]一条直径交准线于O,那么OS垂直于被此直径平分的弦.

命题 19

1. [抛物线的]正焦弦的一半是任一焦点弦被焦点分成两部分的调和中项.[所谓"c是a与b的调和中项",是指$\frac{1}{c}$是$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的算术平均值.]

2. [在抛物线中,]如果 QV 是直径 PV 的一条纵标线,并且 pv 是与 PQ 共轭的直径[即 pv 是平行于 PQ 的弦的中点轨迹],交 PQ 于 v,[点 P 和 p 在抛物线上,]那么 $pv=\frac{1}{4}PV$.

第2章 正射影

定义 1. 从一点向一个定平面作垂线,垂足称为这个点的射影,定平面称为射影面.

2. 一条线的射影(直线或曲线),是其上各点射影的集合,即从线上各点向射影面所作垂线的垂足的轨迹.

3. 区域的射影是一个已知区域的边界曲线的射影所围成的区域.

【26】 4. 包含给定曲线的平面与射影面的交线叫做基线.

命题 α

直线的射影是直线.

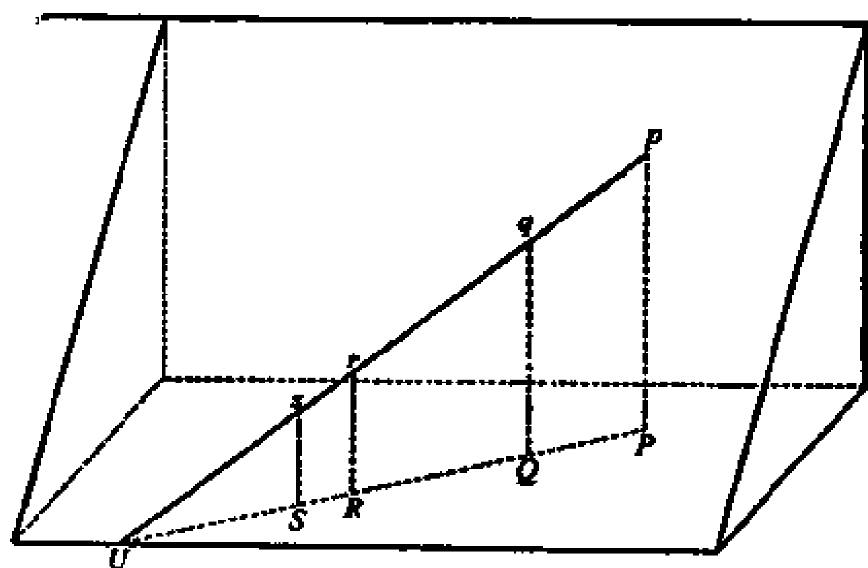


图 2-1

[证明]　设 *pqrsU* 是已知直线，交基线于 U，并设 P，Q，R，S 分别是 p，q，r，s 的射影.

于是垂线 *pP*，*qQ*，*rR*，*sS* 都在同一平面 *pPU* 内（Euc. Ⅺ. 6,7.），这个平面与射影面的交线是一直线 *UP*.（Euc. Ⅺ. 3.）

所以，*Up* 的射影是直线 *UP*，它们相交于基线上一点 U.

命题 β

一直线上的线段比在射影下不变.

[证明]　设 *pqrsU* 是已知直线，*PQRSU* 是它的射影.

那么 *pP*，*qQ*，*rR*，*sS* 平行，因为它们都是射影面的垂线，并且它们都在同一平面 *PUp* 内；因而线段 *PQ*，*QR*，*RS* 之比等于 *pq*，*qr*，*rs* 之比.（Euc. Ⅵ. 2.） [27]

命题 γ

平行直线的射影是平行直线，并且保持直线上的线段比.

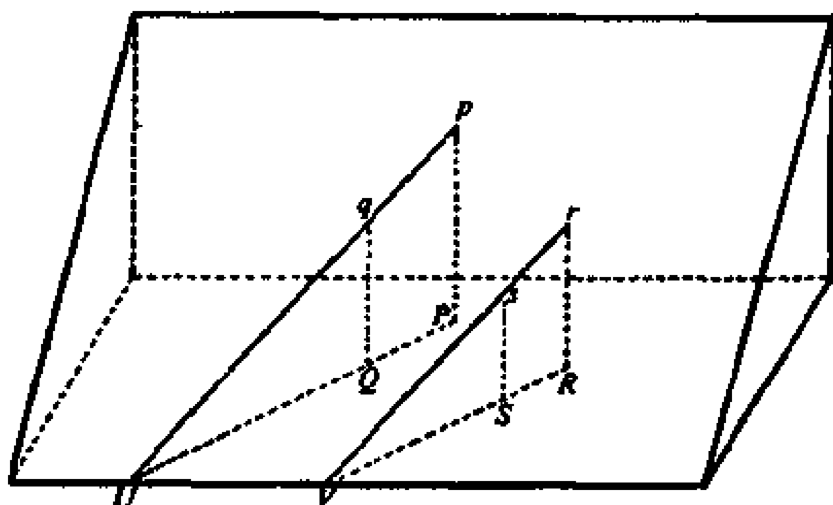


图 2-2

[证明]　设 *pqU*，*rsV* 是两条平行直线，分别交基线于 U，V，并设 *PQU*，*RSV* 是它们的射影. 那么

$pP /\!/ rR$，（Euc. XI. 6.）

$pq /\!/ rs$；（假设）

∴　平面 UpP // 平面 VrR.（Euc. XI. 15.）

因此

$PQU /\!/ RSV$.（Euc. XI. 16.）

进而，三角形 pUP 与 rVR 对应角相等，（Euc. XI. 10.）

$$\therefore\quad PQ : pq = PU : pU = RV : rV = RS : rs.$$

[28]　注意：这个比 $PU : pU = \cos\angle pUP$.

命题 δ

切线的射影是切线，并且交基线于同一点.

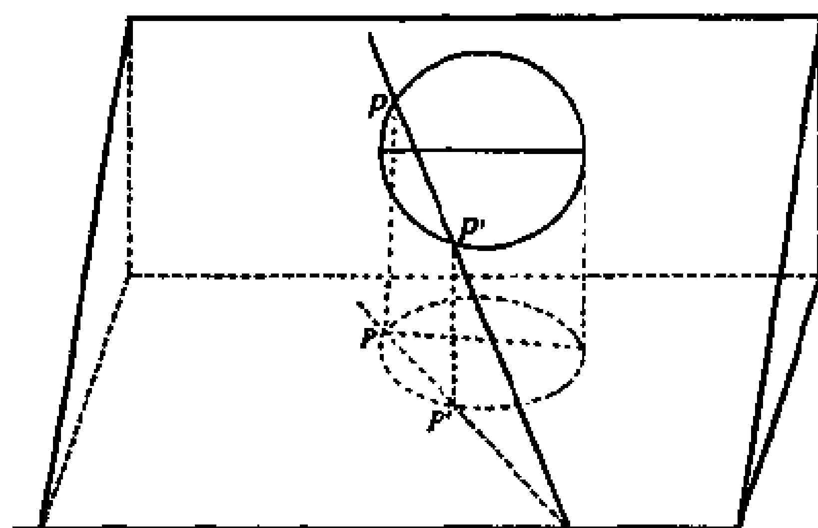


图 2-3

[证明]　设 p，p' 是曲线上相近的两点，则其射影 P，P' 在曲线的射影上.

令 p'［沿曲线］移动到与 p 重合，因而 pp' 成为已知曲线的切线.

于是 P' 移动到与 P 重合，因而 PP' 成为已知曲线的射影的切线.

同时还得到，这些直线 [pp' 和 PP'] 相交于基线上同一点.（命题 α） [29]

命题 ϵ

面积的比在射影下不变.

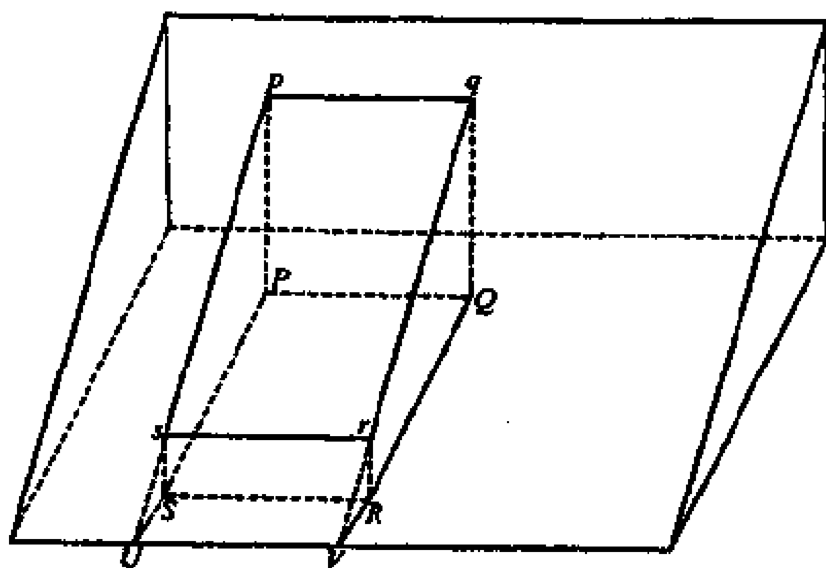


图 2-4

[证明] 情形 1. 设 $pqrs$ 是一个矩形，有两条边 pq，rs 平行于基线，并设 $PQRS$ 是它的射影[如图 2-4]. 延长 ps，qr，交基线于 U，V. 那么

$$\begin{aligned}\text{面积 } PQRS:\text{面积 } pqrs &= PQ\times PS:pq\times ps\\ &= PS:ps\\ &= PU:pU.\end{aligned}$$

现在可以看出，这个比(等于 $\cos\alpha$，其中 α 是原平面与射影面的夹角)与矩形的长和宽无关，因而所有这些矩形[的面积]在射影下按照相同的比减少，并且所有这些原来平面里矩形的面积比与它们的射影的面积比相同. [30]

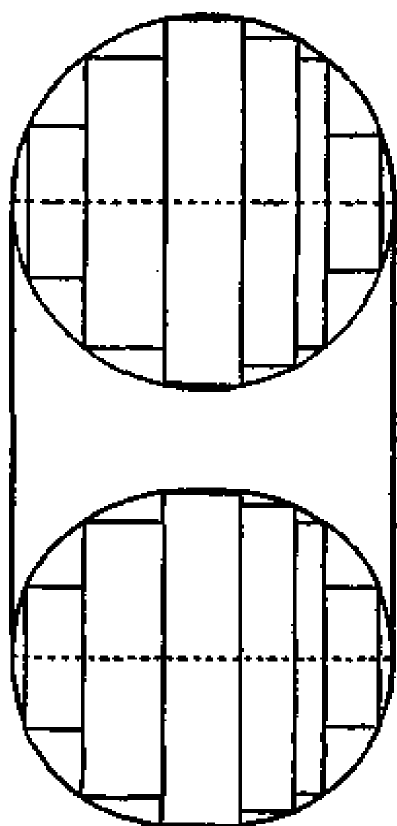


图 2-5

情形 2. 不过，一个任意形状的图形，总能利用垂直于基线的直线分成很多狭长条，每个长条都由一个情形 1 中的矩形及其两端各一小块面积组成[如图 2-5]. 这些矩形面积之和，与它们的射影的面积之和，二者的比为一定. 增加矩形长条的个数，它们的宽度随之减少，因而矩形面积之和与原图形面积的差无限减小. 所以，任一图形的面积由于射影而按照同一比例减小 $(1:\cos\alpha)$，并且原平面内所有图形面积之比与它们的射影面积
[31] 之比相同.

命题 ζ

两条互相垂直的直线，要能使它们的射影也互相垂直，必须且只须原直线中有一条平行于基线.

[证明] 设 ps，sr 是两条互相垂直的直线，其中 sr 平行于

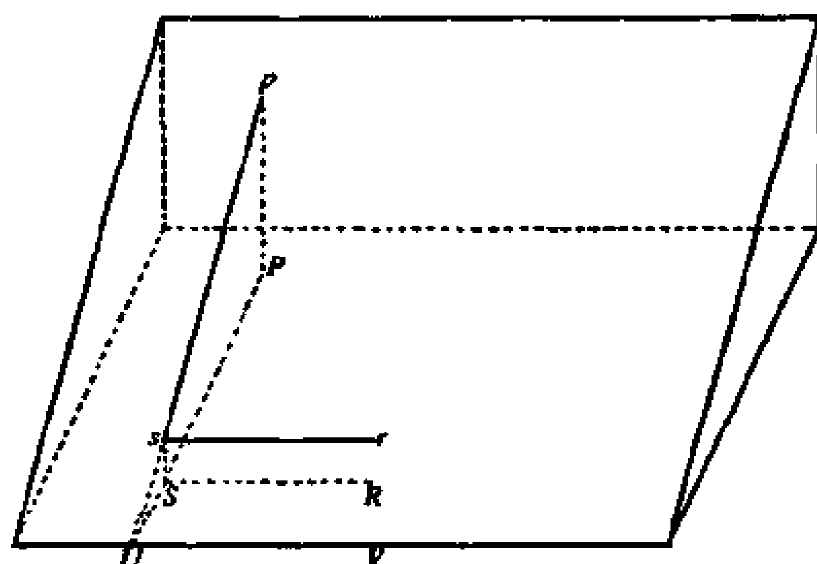


图 2-6

基线 UV. 设 PS，SR 是它们的射影. 因为 sr 平行于 UV，它不与射影面 $PSUV$ 相交，所以 sr 与 SR 不相交. 而 sr 与 SR 又在同一平面里，所以它们互相平行.

但是 SR 与 Ss 垂直，

所以 sr 与 Ss 垂直；（Euc. Ⅰ. 29.）

又因为 sr 与 ps 垂直，（假设）

$\therefore$ $sr\perp$ 平面 $psUSP$；（Euc. Ⅺ. 4.）

$\therefore$ $SR\perp$ 平面 $psUSP$，（Euc. Ⅺ. 8.）

因而 $\angle PSR$ 是直角.

注：直角的射影不是直角，除非原来角的两边中有一边平行于基线. 【32】

第3章 椭　圆

定义　1. 椭圆是到一定点(S)的距离与到一定直线(XM)的距离(PM)之比(e)为小于1的常数的点(P)的轨迹,

$$(SP = e \cdot PM.)$$

2. 定点(S)叫做焦点.

3. 定直线(XM)叫做准线.

[33] 4. 定比(e)叫做离心率.

课题1

作椭圆上的点.

过焦点且垂直于准线的直线是对称轴.

求顶点 A 和A'.

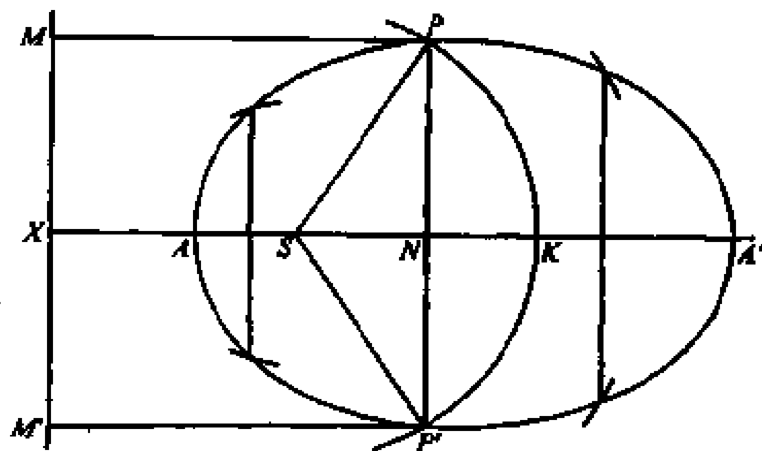


图 3-1

[解] 从焦点 S 作 SX 垂直于准线[垂足为 X]. 作 XS 的分点 A,使

$$SA = e \cdot AX;$$

再在 XS 的延长线上取点 A',使

$$SA' = e \cdot A'X.$$

那么 A 和 A' 是曲线上的点.

在直线 AA' 上任取一点 N,以 S 为圆心,$e \cdot XN$ 为半径作圆;过 N 作直线 PNP' 垂直于 AA',交圆于 P 和 P',则 P 和 P' 是椭圆上的点. 作 PM,$P'M'$ 垂直于准线[垂足为 M,M'],则

$$SP = e \cdot XN = e \cdot PM,$$

$$SP' = e \cdot XN = e \cdot PM'.$$

这样,对应于直线 AA' 上任一点 N,我们得到两点 P 和 P',它们在 AA' 异侧,并且到它等距离. 所以椭圆关于 AA' 对称,即 AA' 是一条[对称]轴,点 A 和 A' 是顶点.

注:可以证明,当 N 在轴 AA' 上位于 A 与 A' 之间时,圆与垂线 NP 相交,但是当 N 在线段 AA' 外部时,圆与垂线不交. 因而椭圆在过 A 或 A' 垂直于轴的两条直线之间. 参考附录. [34]

问　　题

1. 如果一条抛物线和一个椭圆有相同的焦点和准线,那么抛物线位于椭圆外部.

2. 一点 P 在椭圆内、椭圆上或椭圆外,取决于比 $SP:PM$ 小于、等于或大于离心率,这里 PM 是到准线的垂线长.

3. 设椭圆的任意一条弦 PQ[延长后]交准线于 R. 求证:

$$SP:PR = SQ:QR.$$

4. 一条直线交椭圆于 P,交准线于 R. 从 PR 上任一点 K 作 KU 平行于 SR,交 SP 于 U,又作 KI 垂直于准线[垂足为 I]. 求证:$SU = e \cdot KI$.

命题 2

如果[椭圆的]弦 PP'[的延长线]交准线于 K,那么 SK 平

分 SP 与 SP' 所成角的外角.

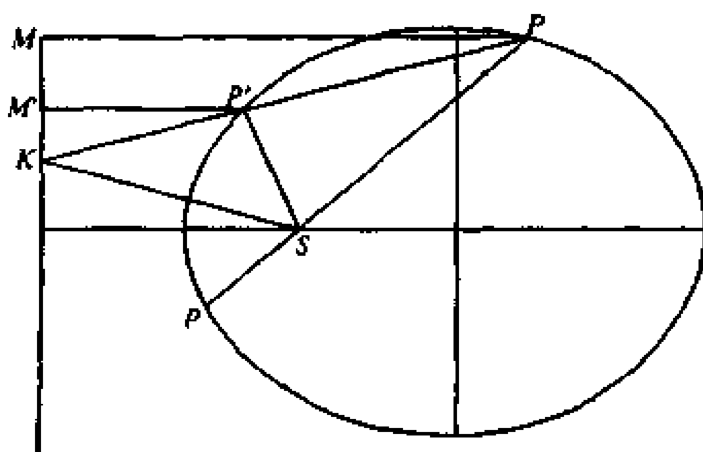


图 3－2

［证明］ 连结 SP，SP'，SK；延长 PS 到 p［p 是与椭圆的交点］，并且作 PM，$P'M'$ 垂直于准线［垂足为 M 和 M'］.那么

$$SP = e \cdot PM,$$

$$SP' = e \cdot P'M'.$$

$$\therefore \quad SP : SP' = PM : P'M' = PK : P'K,$$

其中最后一步利用了相似三角形 PKM 和 $P'KM$.

所以 SK 平分角 $P'Sp$.（Euc. Ⅵ. A.）

问　　题

1. 设 PSP_1 是［椭圆的］一条焦点弦.求证：XP，XP_1 与轴的夹角相等［X 是椭圆的轴与准线的交点.］

2. 设 PSP_1 是［椭圆的］一条焦点弦.延长 PA，P_1A，分别交准线于 K 和 K_1.求证：$\angle KSK_1$ 是直角.

3. ［椭圆的］两条弦 PQ，$P'Q$［延长后］分别交准线于 p，p'.求证：$\angle pSp'$ 是 $\angle PSP'$ 的一半.

4. 如果给定了椭圆的焦点和这曲线上两点，那么准线将通过一个定
［35］点.

定义 如果通过焦点(S)的轴交椭圆于 A 和A',那么 AA' 叫做长轴.

定义 平分 AA'于 C,则 C 点叫做椭圆的中心.

定义 过 C 点作的双纵标线BCB'叫做短轴.

命题 3

若 PN 是椭圆上一点 P 的纵标线,则

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2,$$

并且 CB 小于 CA.

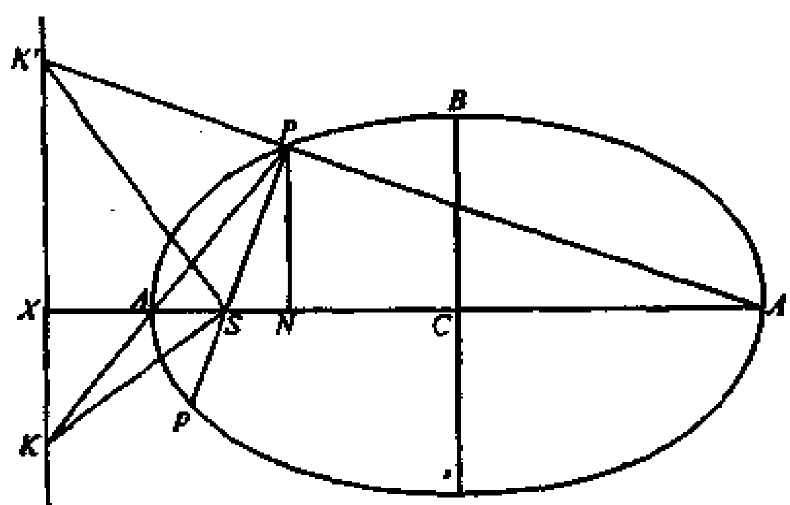


图 3-3

[证明] 连结 PA,$A'P$,并延长之,交准线于 K 和K'.

连结 SP,SK,SK',并且延长 PS 到[与椭圆相交于]点 p.

由相似三角形 PAN,KAX,得

$$PN : AN = KX : AX.$$

由相似三角形 $PA'N$,$K'A'X$,得

$$PN : A'N = K'X : A'X.$$

[36] $\therefore \quad PN^2:AN\cdot A'N = KX\cdot K'X:AX\cdot A'X.$

但是 SK 平分 $\angle ASp$(命题 2),SK' 平分 $\angle ASP$(命题 2),

$$\therefore \quad \angle KSK' \text{为直角};$$

$$\therefore \quad KX\cdot K'X = SX^2; \quad (\text{Euc. VI. 8.})$$

$$\therefore \quad PN^2:AN\cdot A'N = SX^2:AX\cdot A'X.$$

类似地,因为 P 点可能与 B 重合,[从上式]得

$$BC^2:AC^2 = SX^2:AX\cdot A'X.$$

$$\therefore \quad PN^2:AN\cdot A'N = BC^2:AC^2.$$

进而得到

$$BC^2:AC^2 = SX^2:AX\cdot A'X.$$

现在有

$$SX = AX + SA = AX(1+e),$$

以及

$$SX = A'X - SA' = A'X(1-e),$$

$$\therefore \quad SX^2 = (1-e^2)AX\cdot A'X < AX\cdot A'X;$$

$$\therefore \quad BC < AC.$$

问　　题

1. 如果 PM 是[从椭圆上一点 P]到 BCB' 的垂线,求证:

$$PM^2:BM\cdot B'M = CA^2:CB^2.$$

2. 设 P,Q 是椭圆上的两点,AQ,$A'Q$ 交 PN 或 PN 的延长线于 L 和
[37] M.求证:$PN^2 = LN\cdot MN$.

命题 4

如果以 AA' 为直径的圆上各点的纵标线都依照 $CA:CB$ 按比例缩短,那么新端点的轨迹是椭圆.

$$(PN:pN = CB:CA.)$$

[证明]　设 ApA' 是以 AA' 为直径的圆,NPp 是 p 点的纵标线,交椭圆于 P.那么

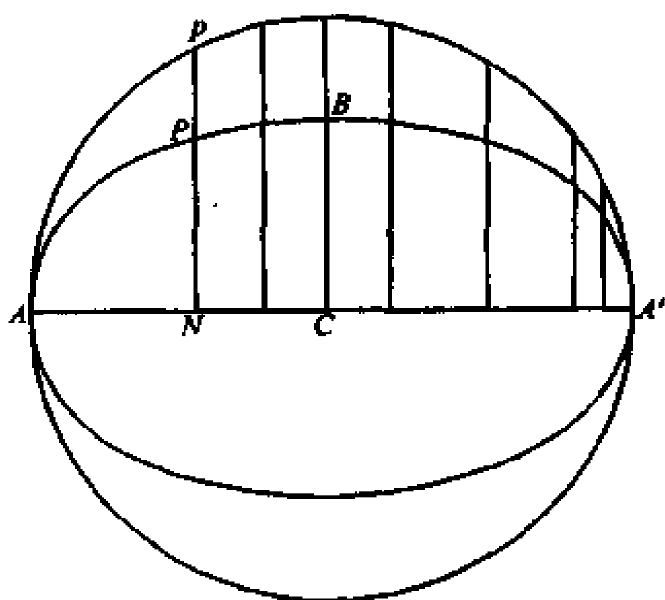


图 3-4

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2.\quad\text{（命题 3）}$$

但是

$$pN^2 = AN \cdot A'N,\quad\text{（Euc. Ⅲ. 3 和 35.）}$$

$$\therefore\quad PN^2 : pN^2 = CB^2 : CA^2,$$

$$PN : pN = CB : CA.\quad\text{（证毕）}$$

定义 1. 以 AA' 为直径的圆叫做辅助圆.

2. 椭圆和辅助圆中位于一条公共纵标线上的点 p 和 P 叫做对应点.

3. 椭圆的一条弦和辅助圆的一条弦叫做对应弦，如果它们的端点是对应点. [38]

命题 5

圆的射影是椭圆.

［证明］ 设 apa' 是圆，其直径 aa' 平行于基线，cb 是垂直于 aa' 的半径，pn 是从［圆上］任一点 p 到 aa' 的垂线.

设 $APBA'$ 是圆 $apba'$ 的射影，并设点 A, A', B, C, P, N 是点

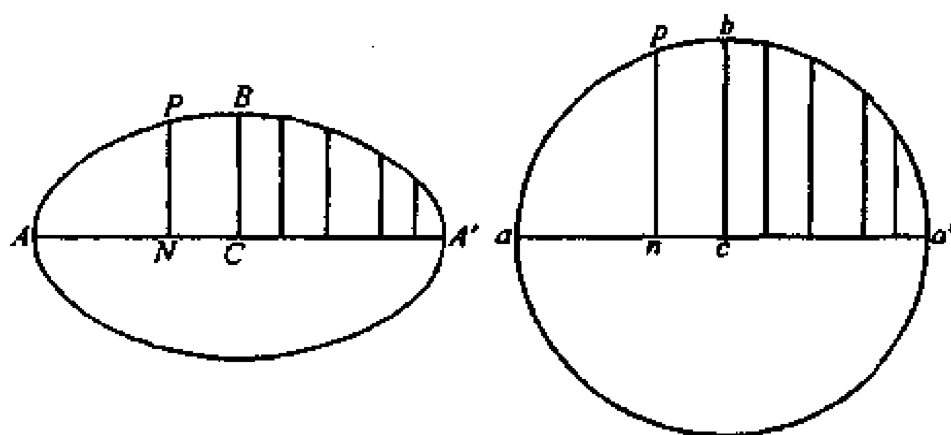


图 3－5

a，a'，b，c，p，n 的射影．那么

$$pn^2 = an \cdot na'. \quad (\text{Euc. Ⅲ. 3 和 35.})$$

$$\therefore \quad pn^2 : cb^2 = an \cdot na' : ca^2.$$

但是

$$pn^2 : cb^2 = PN^2 : CB^2, \quad (\text{命题 } \gamma)$$

并且

$$an \cdot na' : ca^2 = AN \cdot NA' : CA^2.$$

$$\therefore \quad PN^2 : CB^2 = AN \cdot NA' : CA^2.$$

又因为 PN 和 CB 垂直于 AA'(命题 ζ)，

所以 P 点的轨迹是以 CA 和 CB 为[半]轴的椭圆．(命题 3)

注：圆 aba' 等于辅助圆．比 $CB : CA = \cos\alpha$，其中 α 是射影角[即圆所在平面与射影面的夹角]．

【39】 椭圆的面积 $= \pi AC \cdot BC$．

命题 6

椭圆关于短轴对称，因而有第二个焦点(S')和第二条准线．

[证明] 设 pmp' 是辅助圆的一条弦，与短轴成直角，交点为 m．在椭圆上取对应于 p 和 p' 的点 P 和 P'，并且作公共纵标

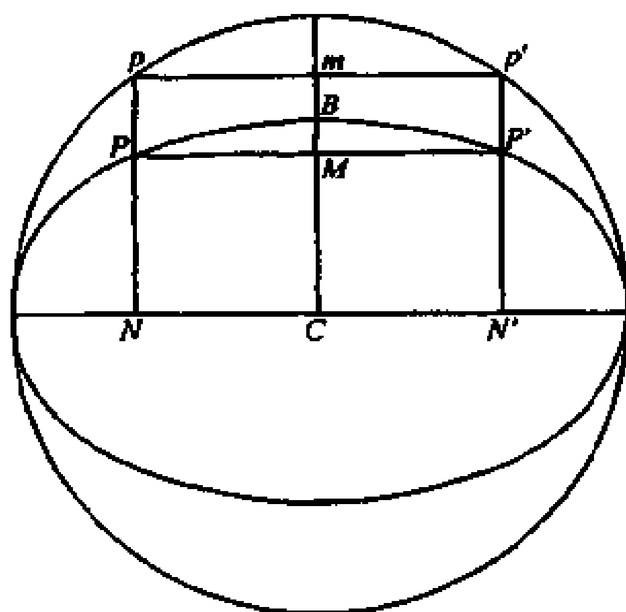


图 3-6a

线 pPN, $p'P'N'$, 连结 PP', 交短轴于 M, 那么

$pN = p'N'$. （Euc. Ⅰ. 34.）

$\therefore \quad PN = P'N'$. （命题 4）

所以 PP' 平行于 NN', 因而垂直于 CB.

又因为

$pm = p'm$, （Euc. Ⅲ. 3.）

$\therefore \quad PM = P'M$. （Euc. Ⅰ. 34.） [40]

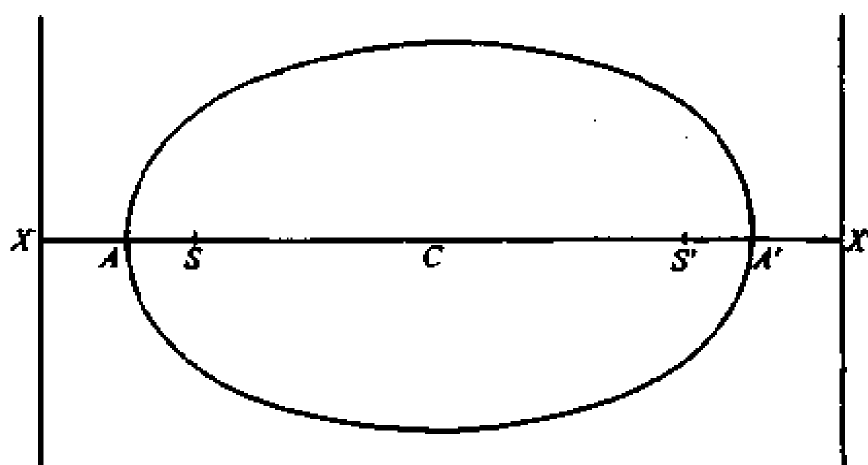


图 3-6b

因此，对应于椭圆上任一点 P，存在椭圆上另外一点 P'，使得弦 PP' 被短轴垂直平分，即椭圆关于短轴对称.

如果我们[如图 3－6b，在长轴上从中心 C 向两侧]取 CS' 等于 CS，CX' 等于 CX，并且过 X' 作直线垂直于 AA'，那么椭圆也可描绘成以所作直线为准线，S' 为焦点，离心率与前面相同.

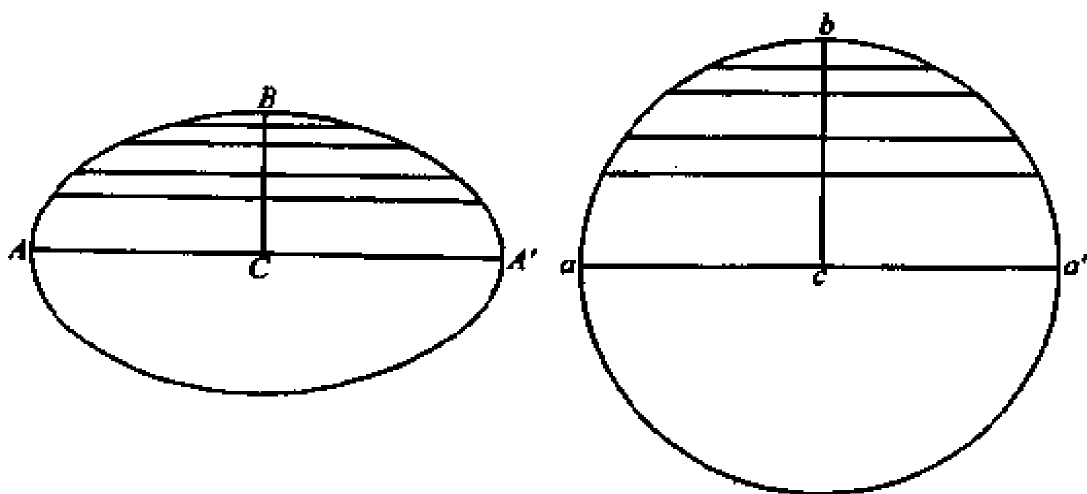


图 3－6c

[进而，如图 3－6c，]设 aba' 是圆，ABA' 是它的射影.

圆的一切平行于 aa' 的弦都被 cb 平分.(Euc. Ⅲ. 3.)

因而，椭圆的一切平行于 AA' 的弦都被 CB 平分.(命题 γ)

并且，CB 垂直于它所平分的弦.(命题 ζ)

所以椭圆关于短轴对称.

这样一来，椭圆也能按照中心对面的第二个焦点和第二条
【42】准线来刻划.

问　　题

命题 4

1. 一条直线与一个椭圆不可能多于两个公共点.
2. 从[椭圆的]中心到曲线上所有各点的连线中，CA 最大，CB 最小.
3. 设 P 和 Q 是椭圆和辅助圆上的对应点. 过 P 点作直线 KPL，使它

和轴的夹角与 CQ 相同，交[两]轴于点 K 和 L. 求证：KL 为定长.

4. 设 PM 是[从椭圆上任意点 P]到 BB' 的垂线，与以短轴为直径的圆交于点 p'. 求证：

$$PM : p'M = CA : CB.$$

5. 如果一根杆的两端[分别]沿着两条相交成直角的直线滑动，那么杆上的任一定点画出一个椭圆.

命题 5

一个椭圆本身也能射影成为一个圆. 【41】

命题 7

[设椭圆的中心为 C，长轴为 AA'，焦点为 S 和 S'，离心率为 e，直线 AA' 与两条准线的交点分别为 X 和 X'，则有]

$$CA = e \cdot CX, \quad CS = e \cdot CA, \quad CS \cdot CX = CA^2.$$

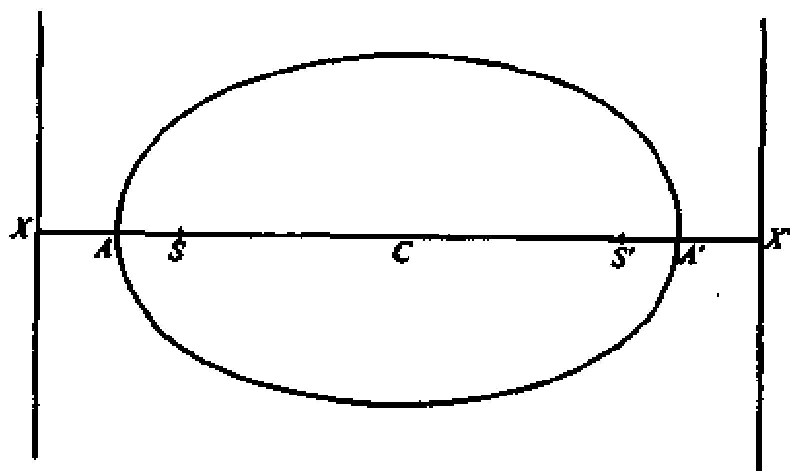


图 3-7

[证明] [分别考虑左焦点、左准线和右焦点、右准线，得到]

$$SA = e \cdot AX, \quad (定义)$$
$$SA' = e \cdot A'X, \quad (定义)$$

两式相加，得

$$AA' = e(AX + A'X) = e(AX + AX') = eXX';$$

$$\therefore \quad CA = e \cdot CX. \tag{①}$$

将两式相加改为两式相减，则得

$$SS' = e \cdot AA'.$$

$$\therefore \quad CS = e \cdot CA. \tag{②}$$

[将①式两边对调后，与②式相乘，又得到]

$$CS \cdot CX = CA^2. \tag{③}$$

问　　题

【43】　已知椭圆和它的一个焦点，求其中心和离心率.

课题 8

[设椭圆的焦点为 S 和 S'，长轴为 AA'，P 是椭圆上的任意点，则]

$$SP + S'P = AA'.$$

椭圆的机械作图法.

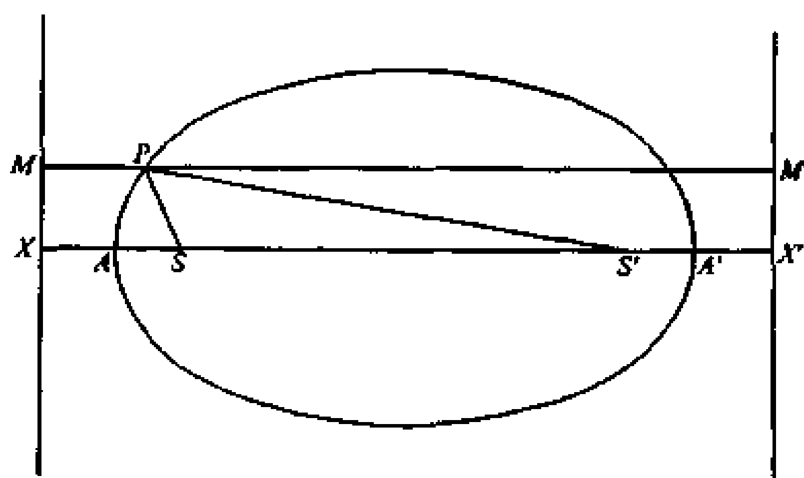


图 3-8

[解]　作 MPM' 垂直于准线[垂足为 M 和 M']，则

$$SP = e \cdot PM,$$

$$S'P = e \cdot PM';$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad SP + S'P &= e \cdot MM' \\ &= e \cdot XX' \\ &= AA'. \end{aligned}$$

如果将一根环状的弦套在位于点 S 和 S' 的两个图钉上，用铅笔尖 P 拉紧弦圈，铅笔就能画出一个椭圆，它的焦点是 S 和 S'.

问　　题

1. 若 P 为任意一点，则 $SP + S'P$ 大于、等于或小于 AA'，视 P 点在椭圆外、椭圆上或椭圆内而定.

2. 有一个圆，画在另一个圆的里面．求证：到这两个圆周等距离的点的轨迹是一个椭圆.

3. 设两个椭圆有[且只有]一个公共焦点，并且它们的长轴相等．求证：它们不可能有多于两个的公共点.

4. [如图 3－8，]求证：若一直线平分由 PS 和 PS' 所成角的外角，则此直线不可能与椭圆有其他公共点. [44]

命题 9

[设椭圆的焦点为 S 和 S'，中心为 C，长轴为 AA'，B 是短轴的一个端点，则有]

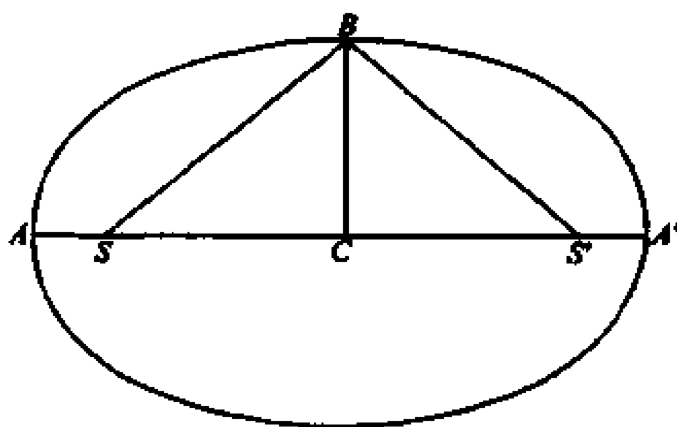


图 3－9

$$CB^2 = CA^2 - CS^2 = SA \cdot SA'.$$

[证明] [因为 B 是椭圆上的点,所以]

$$SB + S'B = AA'. \quad \text{(命题 8)}$$

但是

$$SB = S'B; \quad \text{(Euc. I. 4.)}$$

$$\therefore \quad SB = CA.$$

由此得

$$CB^2 = SB^2 - CS^2 \quad \text{(Euc. I. 47.)}$$

$$= CA^2 - CS^2$$

[45] $$= SA \cdot SA'. \quad \text{(Euc. II. 5.)}$$

定义 通过焦点的双纵标线(LL')叫做*正焦弦*.

命题 10

[椭圆的]半正焦弦 SL 是 CA 与 CB 的第三比例项:

$$SL \cdot CA = CB^2.$$

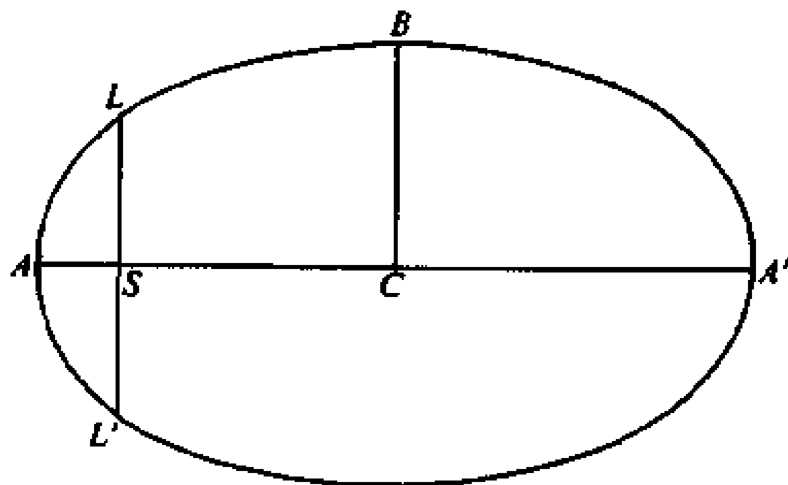


图 3-10

[证明] [如图 3-10,由 AA' 是长轴,得]

$$SL^2 : AS \cdot A'S = CB^2 : CA^2. \quad \text{(命题 3)}$$

但是

$$AS \cdot A'S = CB^2, \text{（命题 9）}$$

$$\therefore \quad SL^2 : CB^2 = CB^2 : CA^2;$$

$$\therefore \quad SL : CB = CB : CA;$$

$$\therefore \quad SL \cdot CA = CB^2.$$ [46]

命题 11

如果在[椭圆上任一点] P 处的切线交准线于 Z，那么 $\angle PSZ$ 是直角.

焦点弦两端点处的两条切线相交在准线上.

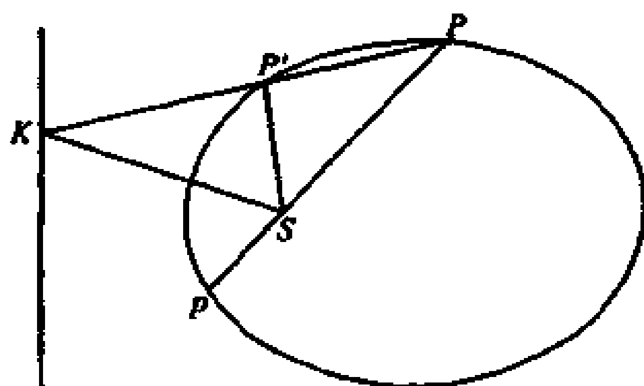


图 3－11a

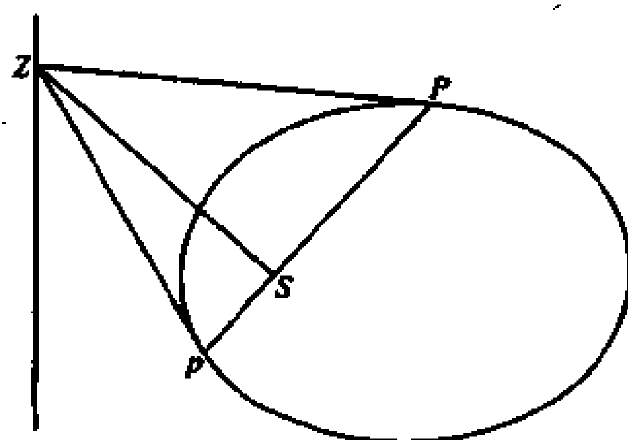


图 3－11b

［证明］ 在椭圆上取一个靠近 P 的点 P'，并设弦 PP' 交准线于 K，延长 PS 到［椭圆上的点］p．那么 KS 平分 $\angle P'Sp$．（命题 2）

当 P' 与 P 重合时，$PP'K$ 成为切线 PZ，$P'Sp$ 成为二直角；因而 $\angle PSZ$ 为直角．

所以，$\angle ZSP$ 是直角，并且 Zp 是 p 点处的切线，即 P 点和 p 点处的切线相交在准线上．

问　题

1．［椭圆的］正焦弦两端点处的切线相交于点 X［这里 X 是长轴所在直线与准线的交点］．

2．如果通过椭圆上任一点 P 作［长］轴的垂线 QPN，交轴于 N，并与点 L 处的切线相交于 Q［这里 L 是正焦弦的一个端点，参考图 3－10］，那么 $QN = SP$．

3．作椭圆在其上已知点 P 处的切线．

【47】 4．通过作［椭圆在其短轴一端］B 点处的切线，证明：$CS \cdot CX = CA^2$．

命题 12

如果在［椭圆的任一点］P 处的法线交长轴于 G，［并设椭圆的离心率为 e，且 S 是它的一个焦点，］那么

$$SG = e \cdot SP.$$

［证明］ 作切线 PZ［交准线于 Z］，连结 SZ，作 PM 垂直于准线［垂足为 M］，连结 SM．

$\angle ZMP$ 和 $\angle ZSP$ 是直角，（命题 11）

因而以 ZP 为直径的圆通过 M 和 S．（Euc．Ⅲ．31．）

因为 $\angle ZPG$ 是直角，所以 PG 与圆相切．（Euc．Ⅲ．16．）

所以［弦切角］$\angle SPG =$［圆周角］$\angle SMP$．（Euc．Ⅲ．32．）

此外又有 $\angle PSG = \angle SPM$．（Euc．Ⅰ．29．）

所以三角形 SPG 与 PMS 相似，

图 3-12

$$\therefore \quad SG : SP = SP : PM;$$

$$\therefore \quad SG = e \cdot SP.$$

问　　题

1. 设 P 是椭圆上任一点，M 是长轴上的定点. 从 M 向 P 点处的切线作垂线. 求此垂线与向径 SP 的交点的轨迹.

2. [在图 3-12 中，从 G 点]向 SP 作垂线 GL，[又由 P 点作长轴的垂线 PN，垂足分别为 L、N.]那么 $PN : GL$ 是常数，并且 PL 等于正焦弦的一半.

3. [如图 3-12，]延长 PG，交短轴于 g，则 gS 的延长线与准线的交点恰好是 P 到准线的垂线足 M. 【48】

命题 13

椭圆在其任一点 P 的切线和法线分别平分[P 点处]两条焦半径所成的外角和内角.

[证明]设 TPY' 是切线，PG 是法线，则

$$SG = e \cdot SP, \quad (\text{命题 } 12)$$

$$S'G = e \cdot S'P.$$

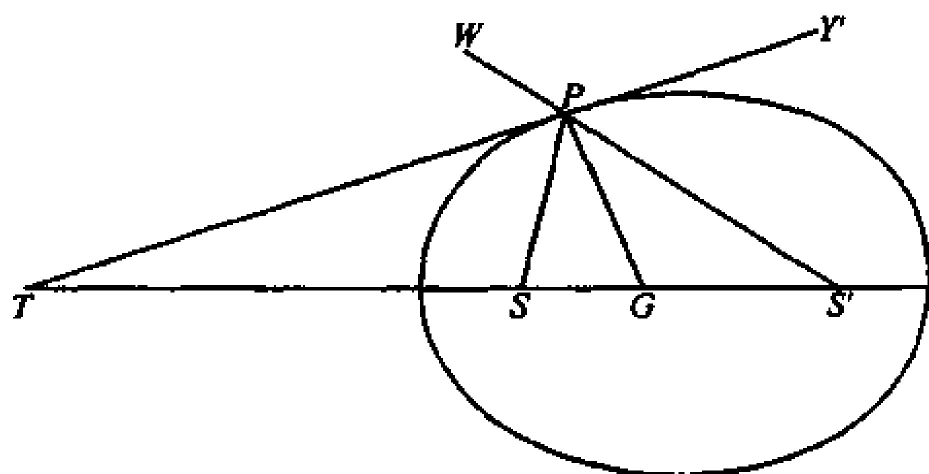


图 3－13

$$\therefore \quad SG : S'G = SP : S'P,$$

因而 PG 平分$\angle SPS'$.（Euc. Ⅵ. 3.）

进而得到余角$\angle SPT$ 和$\angle S'PY'$相等. 但是

$$\angle S'PY' = \angle WPT, \text{（Euc. Ⅰ. 15.）}$$

所以 PT 平分外角$\angle SPW$.

问　　题

1. [如图 3－13,]设 SY 垂直于 P 点处的切线，交 $S'P$ 的延长线于 s. 求证:(1)$sY = SY$;(2) $SP = Ps$;(3) $S's = AA'$.

如果 P 点沿椭圆移动，s 点的轨迹是什么?

(注:由于结论(1)，点 s 叫做焦点关于切线的镜象.)

2. 设[椭圆在其任意点 P 的]切线和法线分别交短轴于 t 和 g，则以 gt 为直径的圆通过点 P 和两个焦点.

3. 如果[椭圆在其]点 P 处的法线分别交长轴和短轴于点 G 和 g，求证:三角形 SPG 与 gPS' 相似.

4. [承上题，求证:] $SP \cdot S'P = PG \cdot Pg$.

5. 除去轴的端点而外，[在椭圆上]其他各点的法线都不能通过中心.

6. 过椭圆的两个焦点作一个圆，连结这个圆与短轴[延长线]的交点
【49】和它与椭圆的交点，那么所得的直线与椭圆相切.

命题 14

从[椭圆的]焦点到[这椭圆上任一点] P 处的切线作垂线 ($SY, S'Y'$)，垂足必在辅助圆上.

又若[从椭圆的中心 C]作 P 点处切线的平行线 CE，交 $S'P$ 于 E，则 $PE = CA$.

此外还有

$$SY \cdot S'Y' = CB^2.$$

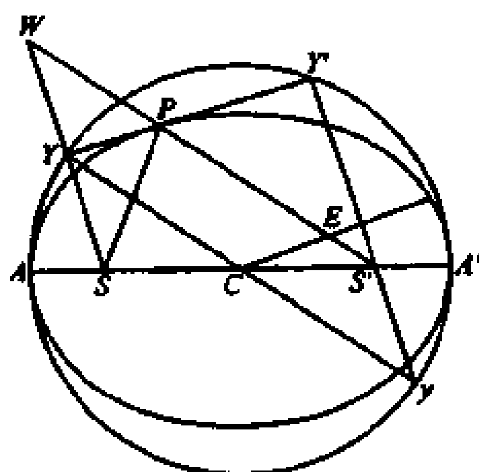


图 3－14

[证明] 延长 $S'P$, SY, 相交于 W. 连结 CY.

在三角形 YPS 和 YPW 中，YP 是公共边，直角 $\angle PYS$，$\angle PYW$ 相等，并且

$$\angle YPS = \angle YPW, \quad \text{(命题 13)}$$

[因而这两个三角形全等.]

$$\therefore \quad SP = PW, \quad SY = YW; \quad \text{(Euc. I . 26.)}$$

再利用 $SC = CS'$，得到 $S'W$ 平行于 CY. (Euc. Ⅵ. 2.)

$$\therefore \quad CY = \frac{1}{2}S'W \quad \text{(Euc. Ⅵ. 4.)}$$

$$= \frac{1}{2}(S'P + PS) = \frac{1}{2}AA' \quad \text{(命题 8)}$$

$= CA$;

所以 Y 在辅助圆上.

类似地,Y' 也在辅助圆上.

又因为 $YCEP$ 是平行四边形,所以

$$PE = CY = CA.$$

延长 $Y'S'$,交圆于 y,连结 Yy.

那么[圆周角]$\angle YY'y$ 是直角,因而 Yy 通过圆心 C.(Euc, Ⅲ. 31.)

由此得

$$SY = S'y, \quad \text{(Euc. Ⅰ. 4.)}$$

因而

$$SY \cdot S'Y' = S'y \cdot S'Y' = AS' \cdot S'A' \quad \text{(Euc. Ⅲ. 35.)}$$

$$= CB^2. \quad \text{(命题 9)}$$

问 题

1. 作椭圆的切线,使它平行于已知直线.

2. 如果通过[椭圆中心]C 的一条直线平行于[椭圆上一点]P 处的切线,并且分别交直线 SP,$S'P$ 于 E 和 E',求证:$PE = PE'$.

3. [承上题,]再证明 $SE = S'E'$.

4. [设 S 是椭圆的一个焦点,P 是椭圆上任意点,求证:]以 SP 为直径的圆与辅助圆相切.

5. [在图 3-14 中,作]SK 平行于 $S'P$,YK 垂直于 SK.求证:以 S 为焦点、K 为顶点的抛物线与椭圆相切.

6. 已知[椭圆的]一个焦点和一条切线的位置,又知道短轴的大小,求另一焦点的轨迹.

7. 在一个圆中,对于一个定点的张角为直角的弦的包络是一条圆锥曲线,其焦点是定点和圆心.

8. [在图 3-14 中,]如果有第二条切线,与 YPY' 相交成直角,交点为 O,求证:

$$OY \cdot OY' = BC^2.$$

然后再证明 $CO^2 = CA^2 + CB^2$.(两条互相垂直切线的交点的轨迹叫做准圆.) [50]

命题 15

椭圆和辅助圆的对应弦相交在长轴上.

对应点处的切线也相交在长轴上.

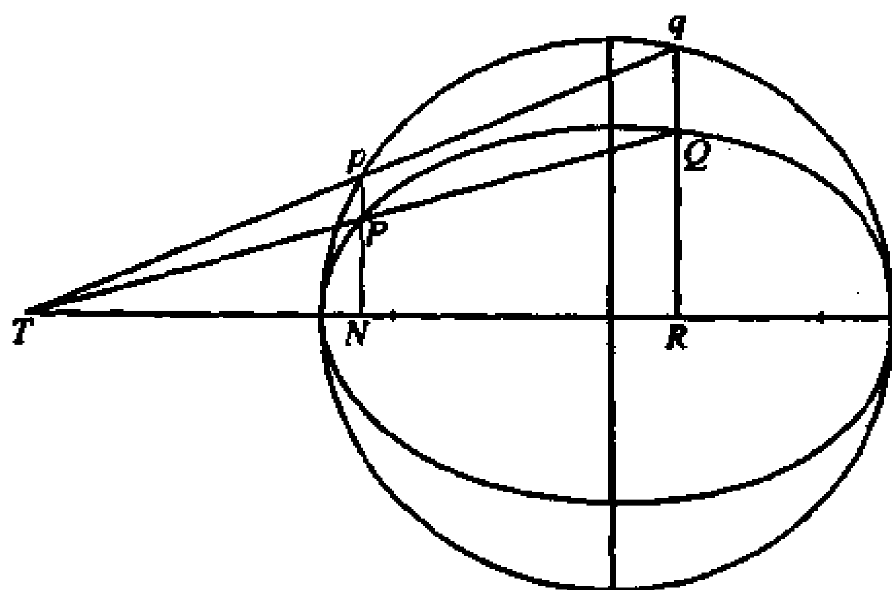


图 3－15

［证明］ 设 PQ 是椭圆的一条弦,交长轴于 T.

设 p 是辅助圆上与 P 对应的点.连结 Tp 并延长,交纵标线 RQ 的延长线于 q.那么

$$qR:pN = RT:NT \quad (\text{Euc. IV. 4.})$$

$$= QR:PN, \quad (\text{Euc. IV. 4.})$$

$$\therefore \quad qR:QR = pN:PN$$

$$= AC:BC; \quad (\text{命题 } 4)$$

∴ q 是 Q 的对应点,且对应弦 PQ,pq 与轴相交于同一点 T.

如果 Q 移动到与 P 重合,那么 q 移动到与 p 重合,因而

PT，pT 分别成为椭圆和圆的切线，即对应点的切线相交在长轴上．

问　　题

1．［如图 3－15，设］P 和 p 是对应点，［C 是椭圆的中心，B 是短轴的一端，辅助圆在］p 点的切线与 CB 的延长线相交于 K．求证：$CK \cdot PN = AC \cdot BC$．

2．设 OQ，OQ' 是椭圆的切线，ON 是［长］轴的垂线．求证：辅助圆在对应点 q 和 q' 的切线的交点在 ON 上．

[51] 再证明，如果 QQ' 延长后交长轴于 T，则 $CN \cdot CT = CA^2$．

命题 16

若［椭圆在其］点 P 处的切线交长轴延长线于 T，［PN 垂直于长轴，垂足为 N，C 是中心，A 是长轴的一个端点，］则

$$CN \cdot CT = CA^2.$$

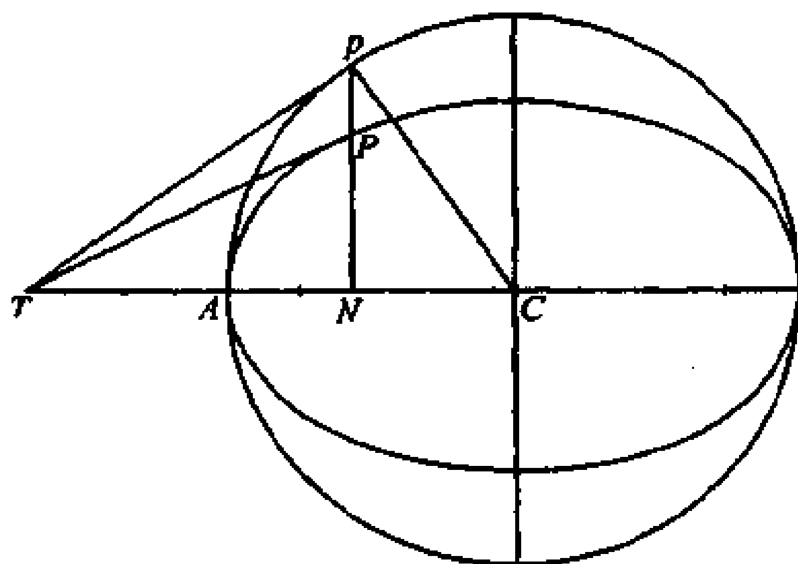


图 3－16a

［证明］　延长 NP，交辅助圆于 p，连结 pT，pC．

那么 pT 与圆相切．（命题 15）

所以$\angle CpT$ 是直角;(Euc. Ⅲ. 18.)

$$\therefore \quad CN \cdot CT = Cp^2 \quad (\text{Euc. Ⅵ. 8.})$$

$$= CA^2.$$ [52]

[证法二] [如图 3 - 16b,]作出以椭圆为其射影的圆,并设 C,P,T,N,A 分别是 c, p, t, n, a 的射影.

那么 pt 与圆相切.(命题 δ)

所以$\angle cpt$ 是直角,(Euc. Ⅲ. 18.)

同时$\angle cnp$ 也是直角;(命题 ζ)

$$\therefore \quad cn \cdot ct = cp^2; \quad (\text{Euc. Ⅵ. 8.})$$

$$\therefore \quad cn \cdot ct = ca^2.$$

$$\therefore \quad CN \cdot CT = CA^2. \quad (\text{命题 } \beta)$$

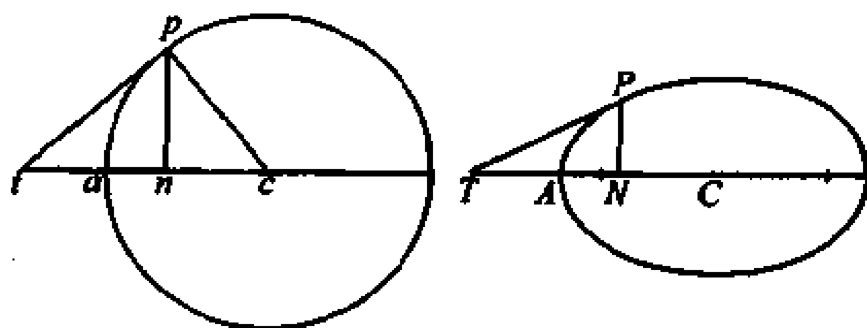


图 3 - 16b

问　题

1. 设 p 是辅助圆上对应于 P 的点,Sy 是到 p 点处切线的垂线[S 是椭圆的焦点,y 是垂足].求证:$Sy = SP$.

2. [如图 3 - 16a,]通过 N 和 T 的圆必与辅助圆成直角.[即两圆在交点处的切线成直角.]

3. 设 CY, AZ 分别是从椭圆的中心和长轴一端到椭圆上任一点 P 处切线的垂线[垂足为 Y 和 Z].求证:

$$CA \cdot AZ = CY \cdot AN.$$ [53]

命题 17

如果[椭圆在其]点 P 处的切线交短轴延长线于 t，且 Pn 是从 P 点到短轴的垂线[垂足为 n]，则

$$Cn \cdot Ct = CB^2.$$

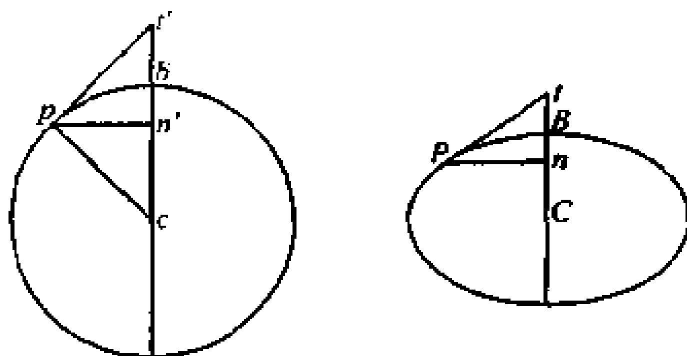


图 3 – 17

[证明] 作出以椭圆为其射影的圆.

设 c、p、t'、b、n' 是射影分别为 C，P，t，B，n 的点.

连结 cp，则 pt' 与圆相切.(命题 δ)

所以$\angle cpt'$是直角.(Euc. Ⅲ. 18.)

又因为$\angle cn'p$ 也是直角,(命题 ζ)

$$\therefore \quad cn' \cdot ct' = cp^2 \quad \text{(Euc. VI. 8.)}$$

$$= cb^2;$$

[54] $$\therefore \quad Cn \cdot Ct = CB^2. \quad (\text{命题 } \beta)$$

命题 18

如果[椭圆在其]点 P 处的法线与过[中心]C 且平行于 P 点处切线的直线相交于 F，与短轴相交于 g，那么

$$PF \cdot PG = CB^2, \quad PF \cdot Pg = CA^2.$$

[证明] 作 PNR 和 Pnr[分别]垂直于[长、短]轴，交 CF 于 R 和 r，并设 P 点处的切线交轴于 T 和 t.

因为∠N 和∠F 都是直角，所以 G，N，R，F 四点共圆.（Euc，Ⅲ. 31.）

$$\therefore \quad PF \cdot PG = PN \cdot PR \quad (\text{Euc. Ⅲ. 36.})$$
$$= Cn \cdot Ct \quad (\text{Euc. Ⅲ. 34.})$$
$$= CB^2. \quad (\text{命题 17})$$

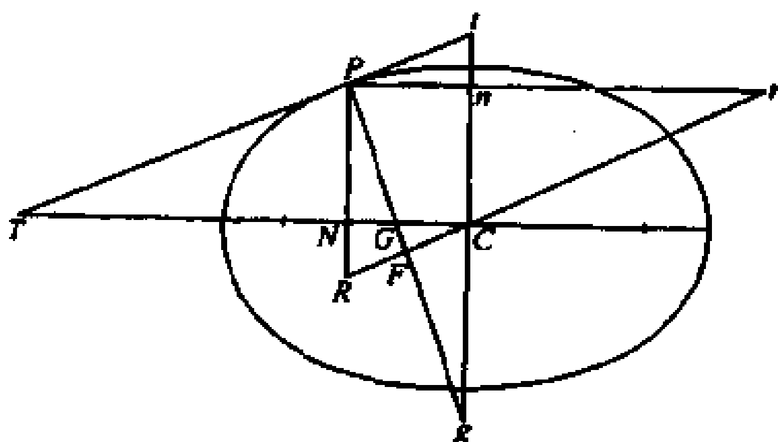


图 3－18

类似地，

$$PF \cdot Pg = Pn \cdot Pr$$
$$= CN \cdot CT \quad (\text{Euc. Ⅰ. 34.})$$
$$= CA^2.$$

问　　题

1. ［如图 3－18，］从 g 点到 SP 或 $S'P$ 作垂线 gK［垂足为 K］. 求证：

$$PK = CA.$$

2. 如果［椭圆在其］点 P 处的切线交长轴于 T，［如图 3－18，］那么 $CF \cdot PT$ 等于从两个焦点到 P 点处法线的垂线长的乘积. [55]

命题 19

［如图 3－19，设椭圆在其任意点 P 处的法线交长轴于 G，交短轴于 g；PN 垂直于长轴，垂足为 N；从中心 C 作 CF 垂直

于法线,垂足为 F,又设椭圆的离心率为 e,那么]

$$GN:CN=CB^2:CA^2,$$

$$CG=e^2\cdot CN.$$

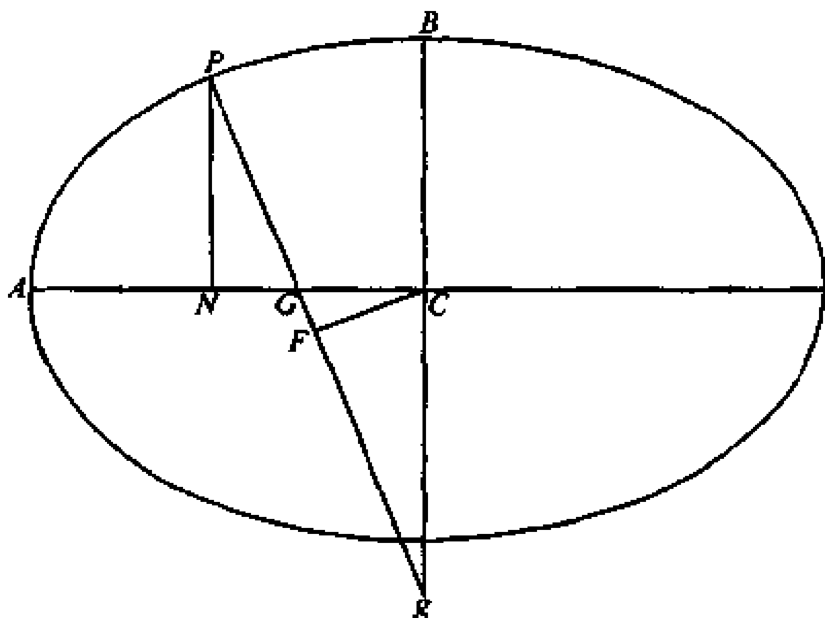


图 3-19

[证明] 延长 PG,交短轴于 g.作 CF 平行于 P 点处的切线,交 Pg 于 F.那么

$$\begin{aligned}GN:CN&=PG:Pg \quad (\text{Euc. VI. 2.})\\&=PF\cdot PG:PF\cdot Pg\\&=CB^2:CA^2. \quad (\text{命题 18})\end{aligned}$$

进而,[从上式利用差比定理,可得]

$$(CN-GN):CN=(CA^2-CB^2):CA^2;$$

$$\therefore\quad CG:CN=CS^2:CA^2;\quad (\text{命题 9})$$

$$\therefore\quad CG=e^2\cdot CN.\quad (\text{命题 7})$$

问　　题

[参看图 3-19]

1. 如果[椭圆在其点]P 处的切线和法线分别交长轴和短轴于 T,t,

G, g. 求证:

(a) $CG \cdot CT = CS^2$;

(b) $Cg \cdot Ct = CS^2$;

(c) Tg, tG 成直角.

2. 求证:$NG \cdot CT = CB^2$.

3. 从本命题导出对于抛物线的相应命题,即 $NG = 2AS$.

4. 在椭圆上求一点 P,使 PG 平分 CP 与 PN 的夹角. [56]

命题 20

如果从[椭圆在其点]P 处切线上的任一点 O 作 OI 垂直于准线,OU 垂直于 SP,那么 $SU = e \cdot OI$. (亚当斯性质)

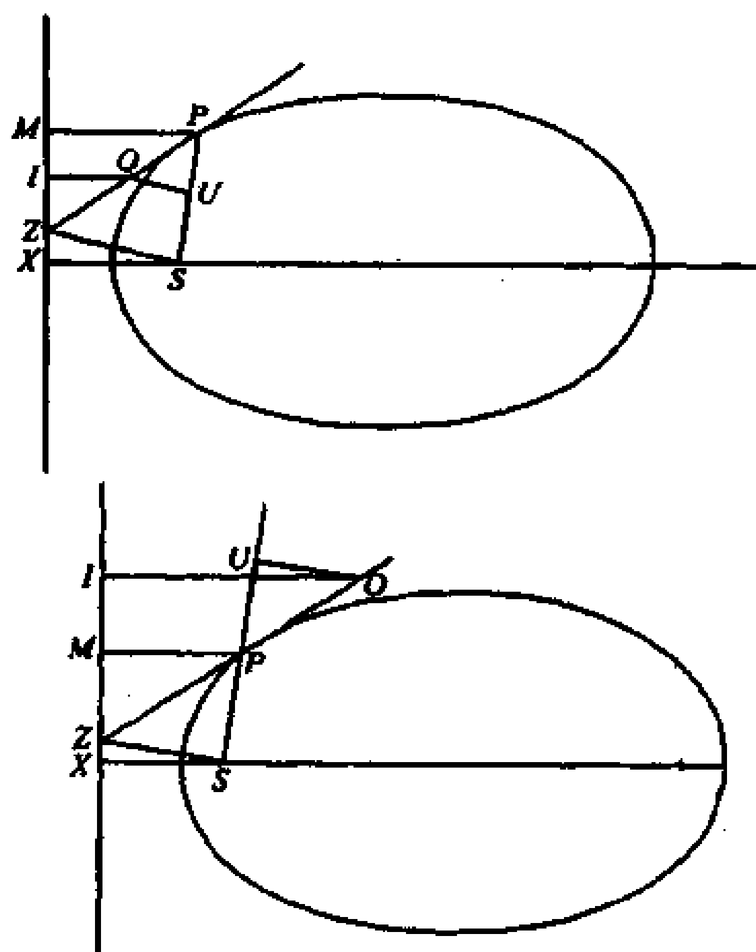


图 3-20

[证明] [设切线与准线的交点为 Z,]连结 SZ,作 PM 垂直于准线[垂足为 M].

$\angle ZSP$ 是直角,(命题 11)

$$\therefore \quad ZS \text{ 平行于 } OU;$$

$$\therefore \quad SU:SP = ZO:ZP \quad (\text{Euc. VI. 2.})$$

$$= OI:PM, \quad (\text{Euc. VI. 4.})$$

但是

$$SP = e\cdot PM,$$

$$\therefore \quad SU = e\cdot OI.$$

问　　题

如果 P 点处的切线与两条准线相交于 Z,Z',那么从 Z 和 Z' 到 SP 的
[57] 垂线[在 SP 上]截得的部分等于 AA'.

作图题 21

从椭圆外一点 O 作两条切线 OQ,OQ'.

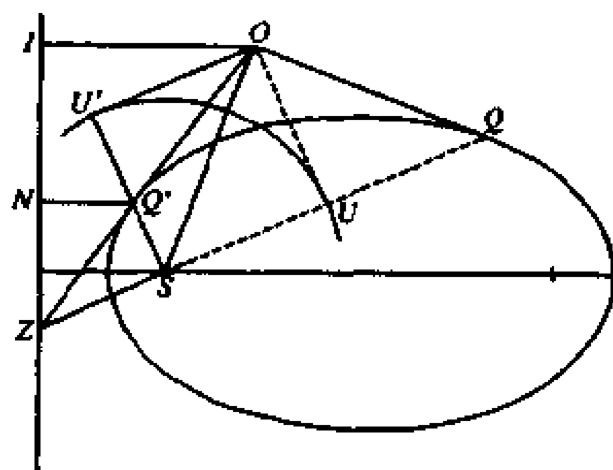


图 3-21a

[解] 作 OI 垂直于准线[垂足为 I].

以[焦点] S 为圆心、$e\cdot OI$ 为半径[e 为离心率]作圆,并且

作圆的切线 OU,OU'[切点为 U,U'].(Euc. Ⅲ. 17.)

作 SZ 垂直于 SU,交准线于 Z.连结 ZO,交 SU 于 Q.作 QN 垂直于准线[垂足为 N].(Euc. Ⅵ. 2.)

那么

$$SQ:SU=QZ:OZ$$
$$=QN:OI;$$
$$\therefore\quad SQ:QN=SU:OI=e:1;$$

所以 Q 在椭圆上.

又因为$\angle QSZ$ 是直角,所以 OQ 与椭圆相切.(命题 11)

类似地可作出第二条切线 OQ'. [58]

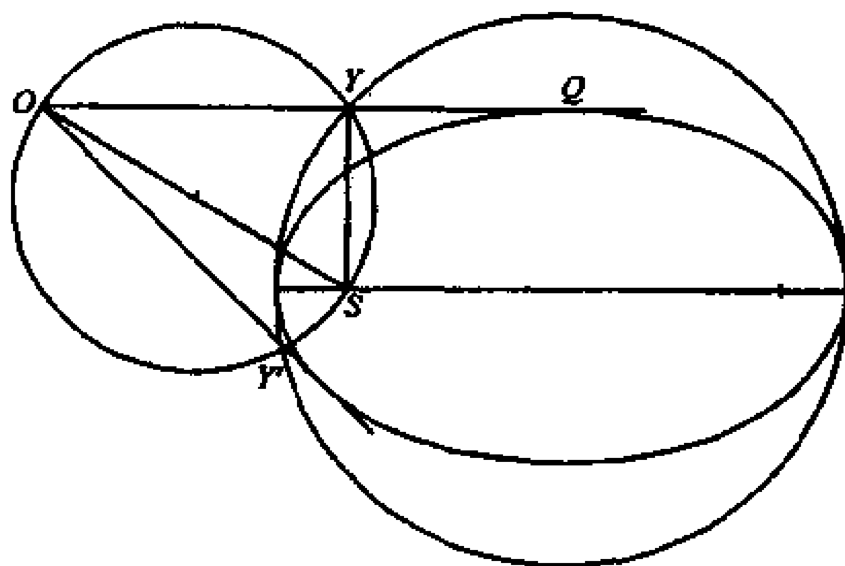


图 3-21b

(解法二) [如图 3-21b,]以 OS 为直径作圆,交辅助圆于 Y 和 Y'.那么$\angle SYO$ 是直角(Euc. Ⅲ. 31.),因而 OY 与椭圆相切(命题 14).类似地,OY' 与椭圆相切.

(解法三) [如图 3-21c,]以 O 为圆心、OS 为半径作圆,再以 S' 为圆心、AA' 为半径作第二个圆,与第一个圆相交于点 U 和 U'.连结 $S'U$,$S'U'$,交椭圆于 Q 和 Q',则

$$\angle OQU=\angle OQS,\quad (\text{Euc. Ⅰ. 8.})$$

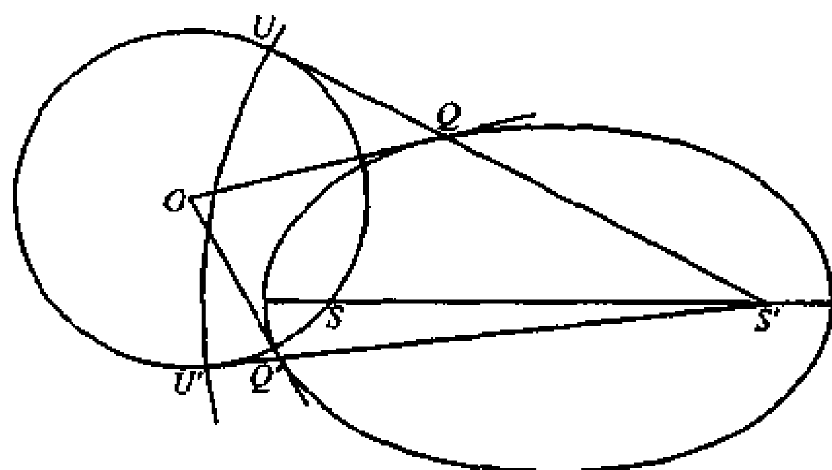


图 3－21c

因而 OQ 与椭圆相切.(命题 13)

[59] 类似地,OQ' 也与椭圆相切.

问题 22

[椭圆的]切线 OQ,OQ' 对于焦点 S 的张角 OSQ,OSQ' 相等.

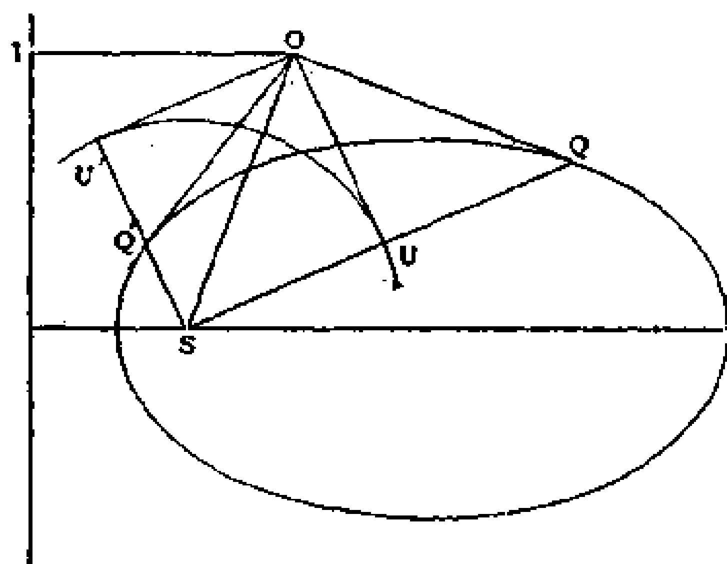


图 3－22

[证明] 作 OU,OU',OI,使它们分别垂直于 SQ,SQ' 和准线[垂足为 U,U',I].连结 OS.那么

$$SU = e \cdot OI \quad (\text{命题 } 20)$$
$$= SU'; \quad (\text{命题 } 20)$$
$$\therefore \quad OU = OU'; \quad (\text{Euc. I. 47.})$$
$$\therefore \quad \angle OSU = \angle OSU', \quad (\text{Euc. I. 8.})$$

即

$$\angle OSQ = \angle OSQ'.$$

问　　题

[参看图 3－22]

1. 设 QQ' 延长后，交准线于 K. 求证：$\angle OSK$ 是直角.

2. 设[椭圆的]焦点弦两端的切线与一顶点[A]处的切线相交于点 T_1, T_2，求证：$AT_1 \cdot AT_2 = AS^2$.

3. 已知 OQ, OQ' 是椭圆的两条固定切线. 一条变动的切线与它们相交于点 q, q'. 求证：$\angle qSq'$ 为一定.

4. 设[椭圆的]一条焦点弦两端的法线相交于点 W，对应切线相交于点 Z. 求证：ZW 通过另一焦点.

5. 设 OQ, OQ' 是从 O 点所作[椭圆]的切线，OS 交 QQ' 于 R. 作 RZ 平行于[长]轴，交准线于 Z. 求证：QZ 和 $Q'Z$ 对于轴的斜角相等. [60]

命题 23

[椭圆的]切线 OQ, OQ' 分别与 OS, OS' 夹角相等.

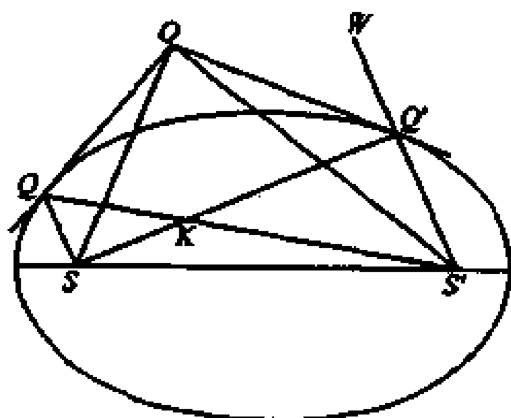


图 3－23

[证明] 连结 $SQ, SQ', S'Q, S'Q'$，延长 $S'Q'$ 到 W，并设 SQ' 与 $S'Q$ 相交于 K. 那么

$$\angle S'OQ' = \angle OQ'W - \angle OS'Q' \quad (\text{Euc. I. 32.})$$
$$= \frac{1}{2}\angle SQ'W - \frac{1}{2}\angle QS'Q' \quad (\text{命题 } 13,22)$$
$$= \frac{1}{2}\angle S'KQ'. \quad (\text{Euc. I. 32.})$$

类似地，

$$\angle SOQ = \frac{1}{2}\angle SKQ,$$

$$\therefore \quad \angle SOQ = \angle S'OQ'. \quad (\text{Euc. I. 15.})$$

问　　题

1. 已知椭圆的两条切线和一个焦点，求中心的轨迹.

2. [如图 3－23.] 在 OQ, OQ' 上取 OR, OR'，使它们分别等于 OS，
[61] OS'. 求证：RR' 等于椭圆的长轴.

命题 24

椭圆的任意一组平行弦的中点的轨迹是一条通过中心的线段；在这线段每一端点处的切线平行于这些弦.

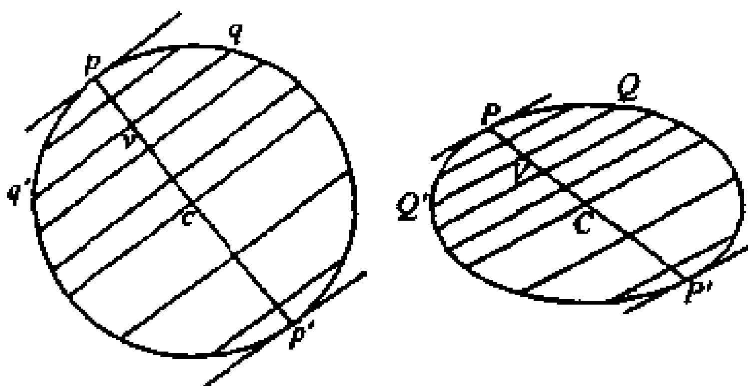


图 3－24

[证明] 作出以这椭圆为射影的圆. 椭圆的这组平行弦的

中点,是圆的一组平行弦中点的射影.(命题 β 和 γ)

在圆中,这些中点在一条通过圆心 c 的直线 cv 上.(Euc. Ⅲ. 3.)

cv 的射影是一条通过椭圆中心 C 的直线 CV.(命题 α)

在圆中,cv 与圆的每个交点处的切线都与原来的那些弦平行,因为大家都垂直于 cv.(Euc. Ⅲ. 3 和 16.)

所以在椭圆中同样成立.(命题 γ 和 δ)

定义 一组平行弦的中点的轨迹叫做直径.

注:术语"直径"和"轴"也常用来表示直径的线段长或者轴被曲线截得的线段长.

定义 被一条直径(CP)平分的弦(QQ')的一半(QV)叫做这条直径的纵标线. 【62】

命题 25

[椭圆在其]任一弦的两端的切线相交于平分此弦的直径上.

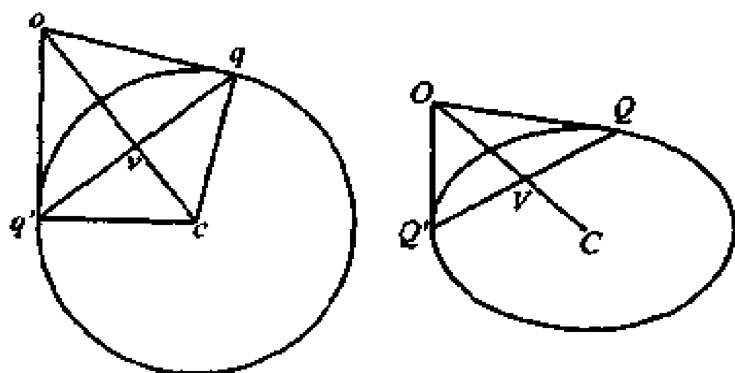


图 3-25

[证明] 设 OQ,OQ' 是切线,连结 CO,交 QQ' 于 V.

作出以这椭圆为射影的圆,并设 O,Q,Q',C,V 是 o,q,q',c,v 的射影.连结 cq,cq'.

那么 oq,oq' 与圆相切.(命题 δ)

$\therefore \quad oq = oq'$. (Euc. Ⅲ. 36.)

$\therefore \quad \angle ocq = \angle ocq'$. (Euc. Ⅰ. 8.)

$\therefore \quad qv = q'v$. (Euc. Ⅰ. 4.)

$\therefore \quad QV = Q'V$. (命题 β)

问　题

1. 设椭圆在其一点 P 的切线交[顶点]A 处切线于 Y. 求证: CY 平行于 $A'P$.

【63】 2. [承上题,]若 CP 交准线于 Z, 则 ZS 垂直于 QQ'.

命题 26

设 QV 是[椭圆的]直径 CP 的一条纵标线[C 是中心, P 在椭圆上], 若 Q 点的切线交直径 CP 于 O, 则

$$CV \cdot CO = CP^2.$$

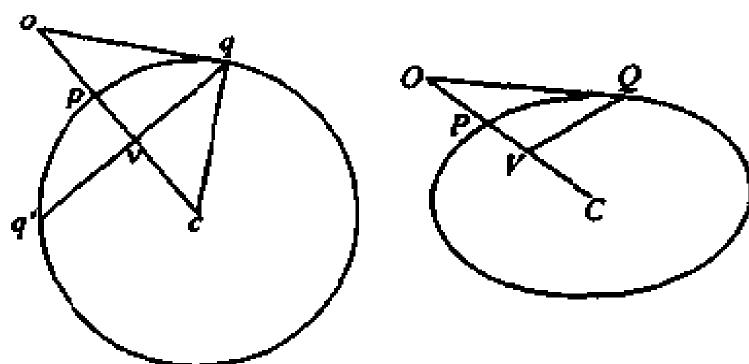


图 3-26a

[证明] 作出以这椭圆为射影的圆. 设 c, q, o, p, v 的射影分别是 C, Q, O, P, V. 连结 cq, 延长 qv 交圆于 q'.

那么 oq 是切线, (命题 δ)

qq' 被 v 点平分, (命题 β)

$\therefore \quad \angle cvq$ 是直角, (Euc. Ⅲ. 3.)

$\angle cqo$ 也是直角, (Euc. Ⅲ. 18.)

$\therefore \quad cv \cdot co = cq^2,$ (Euc. Ⅵ. 8.)

$\therefore \quad cv \cdot co = cp^2,$

$\therefore \quad CV \cdot CO = CP^2.$ (命题 β) [64]

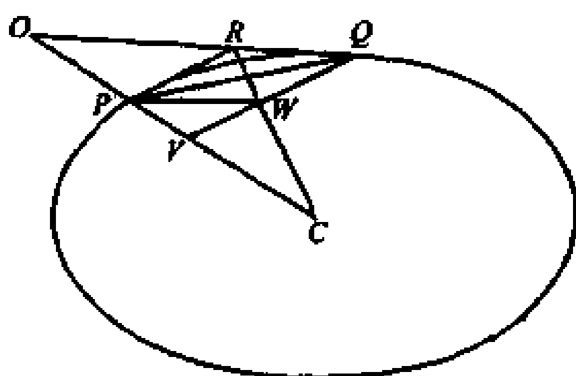


图 3-26b

[证法二] [如图 3-26b,]作点 P 处的切线,交 QO 于 R.
作 PW 平行于 OQ,交 QV 于 W.
连结 PQ,RW.
∵ $PRQW$ 是平行四边形,
∴ RW 平分 PQ.
∴ RW 通过中心.(命题 25)
∴ 由相似三角形得

$$CV:CP = CW:CR$$
$$= CP:CO,$$
$$\therefore \quad CV \cdot CO = CP^2.$$

关于抛物线的对应命题是什么?用这个方法去证明它.
这个证法是剑桥圣约翰学院院长发现的.

问　　题

[参看图 3-26]

1. 设 VR 平行于 PQ,交 CQ 于 R.求证:PR 平行于 Q 点处的切线.
2. [设 a 和 b 是椭圆的两条直径,如果 a 平分平行于 b 的弦,b 也平

分平行于 a 的弦，就说 a 和 b 是一对共轭直径.]设椭圆在其任一点 P 的切线交一对共轭直径于 T 和 T'. 求证：三角形 TCP 与 $T'CP$ 面积之比为
[65] $CT^2 : CT'^2$.

命题 27

[设椭圆的中心为 C,]如果 CP 平分平行于 CD 的弦，那么 CD 也平分平行于 CP 的弦.

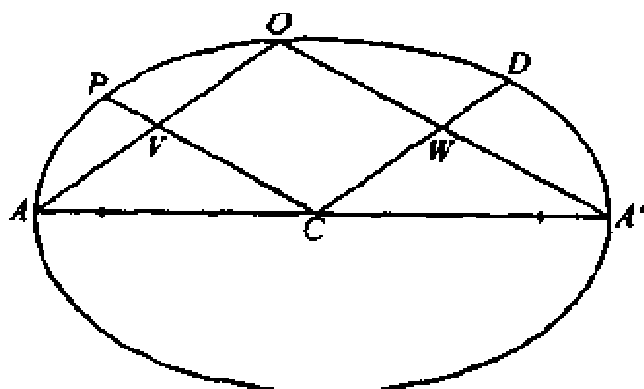


图 3-27

[证明] 作 AQ 平行于 CD，交 CP 于 V;

则 AQ 被 V 点平分.

连结 $A'Q$，交 CD 于 W.

因为 AQ 被 V 点平分，

AA' 被 C 点平分，

∴ $A'Q$ 平行于 CP.

又 ∵ CD 平行于 AQ，

且 AA' 被 C 点平分，

∴ $A'Q$ 被 W 平分.

∴ CD 平分弦 $A'Q$，而这弦是平行于 CP 的.

∴ CD 平分所有平行于 CP 的弦.（命题 24）

定义 如果两条直径之间，每一条都平分平行于另一条的弦，就把它们叫做共轭直径.

注：P 点处的切线平行于 CD，D 点处的切线平行于 CP.（命题 24）

问　题

1. 作椭圆的等长共轭直径.
2. 焦点是由两条共轭直径与准线围成的三角形的垂心. 【66】

命题 28

椭圆中的共轭直径，是圆中互成直角的直径的射影.

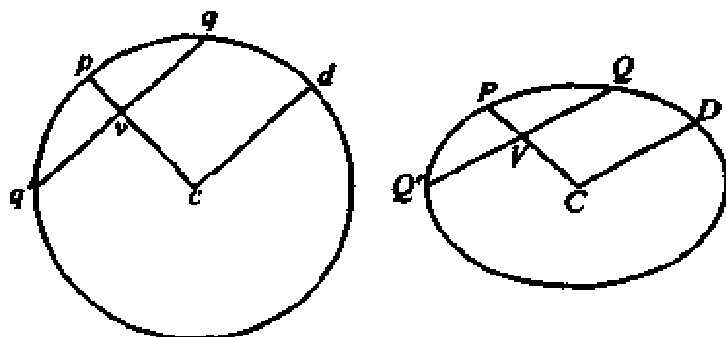


图 3－28

［证明］ 设 CP，CD 是共轭直径，作弦 QVQ' 平行于 CD，并设它在 V 点被平分. 作出以这椭圆为射影的圆，并设 D，Q，P，Q'，V，C 是 d，q，p，q'，v，c 的射影. 那么

cd 平行于 qq'，（命题 γ）

且 qq' 被 v 平分，（命题 β）

∴　cv 垂直于 qq'，（Euc. Ⅲ. 3.）

∴　cp 垂直于 cd.

注：从以上性质可导出共轭直径的一些数量性质，推导方法可参考［下面的］命题 30. 例如可得：

1. 如果 $P'CP$ 和 CD 是两条共轭直径，R 是椭圆上任一其他点，PR，$P'R$ 交 CD 或 CD 的延长线于 T，t. 求证：$CT \cdot Ct = CD^2$.

2. 设 CP，CD，CQ，CR 是［椭圆的］两对共轭直径，并设 P 点处的切线交 CQ，CR 于 T，t，那么 $PT \cdot Pt = CD^2$. 【67】

定义 连结椭圆上一点(Q)和一条直径(PCP')两端的两条弦(QP,QP'),叫做互补弦.

命题 29

互补弦平行于共轭直径.

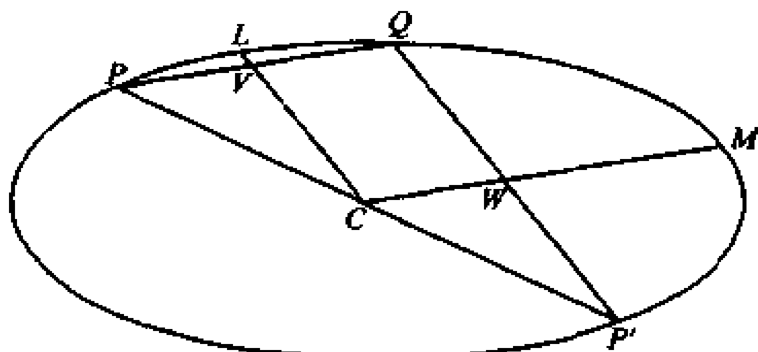


图 3-29

[证明] 作直径 CL,CM 平行于互补弦 $P'Q$,QP,与它们相交于 V 和 W.那么

$$PV : VQ = PC : CP'. \quad (\text{Euc. VI. 2.})$$

$$\therefore \quad PV = VQ.$$

$\therefore$ CL 平分所有平行于 PQ 的弦,(命题 24)

即

$$CL // CM.$$

类似地,CM 平分一切平行于 CL 的弦.

$\therefore CL$,CM 是共轭直径.

问 题

[68] 椭圆的任一内接平行四边形的两条对角线是一对共轭直径.

命题 30

设 QV 是[椭圆的]直径 PCP' 的纵标线,CD 是平行于 QV

的直径,那么

$$QV^2:PV\cdot P'V=CD^2:CP^2.$$

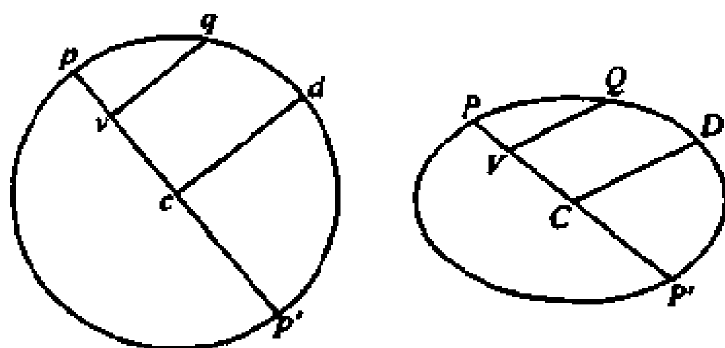


图 3-30

[证明] 作出以这椭圆为射影的圆,并设 P,V,C,P',Q,D 是 p,v,c,p',q,d 的射影.

因为 CP,CD 是共轭直径,

所以$\angle pcd$ 是直角. (命题28),

但是 qv 平行于 cd, (命题 γ)

所以 qv 垂直于 cp,

$\therefore\quad qv^2=pv\cdot p'v$. (Euc.Ⅲ.3 和 35.)

$\therefore\quad qv^2:pv\cdot p'v=cd^2:cp^2$.

但是

$qv^2:cd^2=QV^2:CD^2$, (命题 γ)

$pv\cdot p'v:cp^2=PV\cdot P'V:CP^2$, (命题 γ)

$\therefore\quad QV^2:PV\cdot P'V=CD^2:CP^2$.

问　　题

[如图 3-30,]在 QV 或 QV 的延长线上取一点 R,使 $VR:VQ=CP:CD$.求证:R 的轨迹是椭圆,并求其轴的位置. [69]

命题 31

在三角形 CPN 和 CDR 中,

$$CR : PN = CA : CB,\ CN : DR = CA : CB.$$

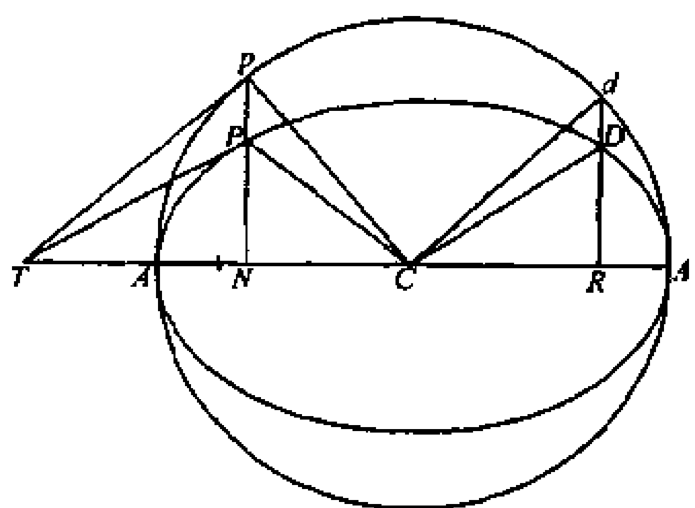


图 3－31

［证明］ 作辅助圆.

延长 NP，RD，交辅助圆于 p 和 d.

连结 Cp，Cd，分别作圆和椭圆的切线 pT，PT，则其交点［T］在轴上.（命题 15）

那么 PT 平行于 CD.（命题 24）

∴ 三角形 TNP 和 CRD 相似，

∴ $TN : CR = NP : RD = Np : Rd$，（命题 4）

且 $\angle TNp = \angle CRd$.

∴ 三角形 TNp 和 CRd 相似.（Euc. Ⅵ. 6.）

∴ $pT \parallel Cd$.

∴ $\angle pCd = \angle CpT =$ 直角.

因而 $\angle NpC$ 与 $\angle dCR$ 相等，都等于 $\angle pCN$ 的余角.

∴ 三角形 pNC 与 CRd 全等，（Euc. Ⅰ. 26.）

$$\therefore\ pN = CR.$$

但是

$$pN : PN = CA : CB,$$

$$\therefore\ CR : PN = CA : CB.$$

类似地

$$CN:DR=CA:CB.$$ [70]

命题 32

[设 CP 和 CD 是椭圆的共轭直径，CA 和 CB 是半轴，那么]

$$CP^2+CD^2=CA^2+CB^2.$$

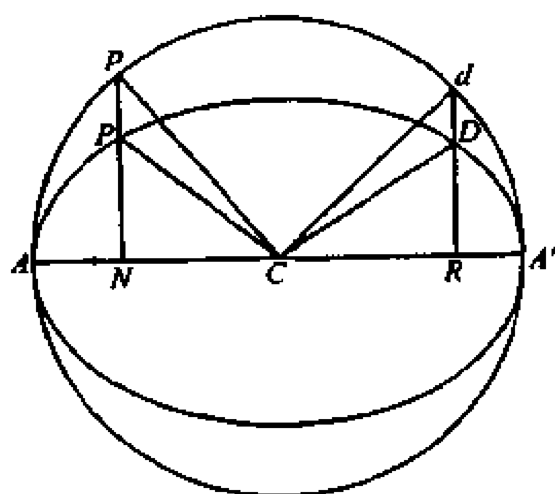


图 3-32

[证明]　作辅助圆.

延长 NP，RD，交圆于 p 和 d.

连结 Cp，Cd.那么

$$DR^2:CN^2=CB^2:CA^2,\quad（命题 31）$$

$$PN^2:CR^2=CB^2:CA^2,\quad（命题 31）$$

$$\therefore\quad DR^2+PN^2:CN^2+CR^2=CB^2:CA^2.$$

但是

$$CN^2+CR^2=CN^2+pN^2=CA^2,\quad（命题 31）$$

$$\therefore\quad DR^2+PN^2=CB^2.$$

现在可得到

$$CP^2+CD^2=CR^2+CN^2+DR^2+PN^2$$

$$= CA^2 + CB^2.$$

问　　题

命题 31

如果[椭圆在其点] P 处的切线交长轴于 T，并设 Q 是从[中心] C 到这切线所作垂线的垂足，求证：

$$CQ \cdot QT : CT^2 = CN \cdot PN : CD^2.$$

再证明：

(a) $PG : CD = CB : CA$；

(b) $Pg : CD = CA : CB$；

(c) $PG \cdot Pg = CD^2$.

命题 32

1. 求一对共轭直径之和的最大值和最小值.

2. 设 CP，CD 是共轭直径. 如果 PG，DH 是在 P 点和 D 点的法线，求
【71】证：$PG^2 + DH^2$ 是常数.

命题 33

[椭圆的]一对共轭直径端点处切线围成的平行四边形的面积是常数. [且若 PF 是 P 到 CD 的垂线长，则]

$$PF \cdot CD = CA \cdot CB.$$

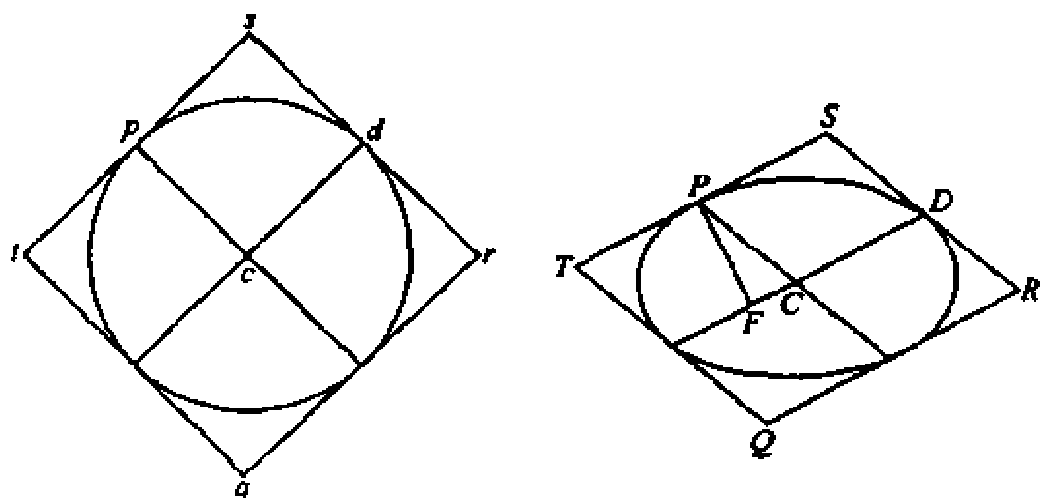


图 3－33

[证明] 设 $QRST$ 是外切平行四边形，那么它的边平行于[共轭直径] CP 或 CD.（命题 24）

作出其射影为椭圆的圆，并设点 p，c，d，q，r 等等的射影为 P，C，D，Q，R 等等.

那么 $\angle pcd$ 是直角，因为 CP 与 CD 互相共轭.（命题 28）

[四边形] $qrst$ 外切于这个圆，（命题 δ）

因而它的边平行于 cp 或 cd，（命题 γ）

所以 $qrst$ 是正方形，它的面积等于直径的平方，因而面积为常数.

所以 $QRST$ 的面积也是常数.（命题 ε）

又因为这个平行四边形的面积等于 $4PF\cdot CD$，而当 CP，CD 是轴时，面积为 $4CA\cdot CB$，

$$\therefore \quad PF\cdot CD = CA\cdot CB.$$ [72]

命题 34

设椭圆的两条弦相交，那么两弦各自被分成两线段的乘积与平行半径的平方成比例.

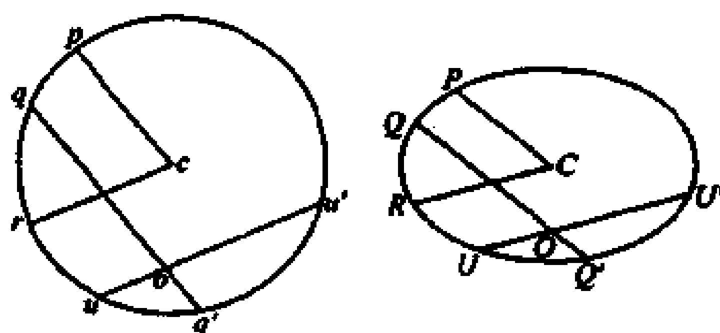


图 3－34

[证明] 设 QOQ'，UOU' 是弦，CP，CR 是平行于它们的半径.

作出以椭圆为射影的圆，并设 q，o，q' 等等的射影是 Q，

O，Q'等等.

在圆中，$qo \cdot oq' = uo \cdot ou'$，　(Euc. Ⅲ. 35.)

并且有 $cp^2 = cr^2$，

$$\therefore \quad qo \cdot oq' : uo \cdot ou' = cp^2 : cr^2.$$

但是

$$qo \cdot oq' : cp^2 = QO \cdot OQ' : CP^2, \quad (\text{命题 } \gamma)$$

以及

$$uo \cdot ou' : cr^2 = UO \cdot OU' : CR^2, \quad (\text{命题 } \gamma)$$

$$\therefore \quad QO \cdot OQ' : UO \cdot OU' = CP^2 : CR^2.$$

问　题

命题 33

[参看图 3-33]

1. $PG \cdot Pg = CD^2$.(参考命题 18)

2. $SP \cdot SP' = CD^2$.

3. $CD \cdot SY = BC \cdot SP$.

4. [设椭圆的直径]CD 共轭于 CP. 如果作 DQ 平行于 SP，CQ 垂直于 DQ，求证：CQ 等于短半轴.

5. 从 D 点到以短轴为直径的圆作切线. 求证：这些切线平行于 P 点
【73】的焦半径.

命题 34

1. 从椭圆外一点所作两条切线长度之比，等于平行于它们的两条半径的比.

2. 如果一个圆交椭圆于四点，那么连结交点的两条弦对于轴的斜角相等.

3. 设一个圆切椭圆于 P 和 Q. 求证：PQ 平行于[椭圆的]一个轴.

4. 从命题 34 导出命题 3 和命题 30.

5. 设 PQ，PQ' 是[椭圆中]与轴所成斜角相等的弦. 求证：三角形 PQQ' 的外接圆与这条圆锥曲线在 P 点相切.

第4章 双 曲 线

定义 双曲线是到一定点(S)的距离与到一定直线(XM)的距离(PM)之比(e)为大于1的常数的点(P)的轨迹,

$$(SP = e \cdot PM.)$$

定点(S)叫做焦点.

定直线(XM)叫做准线.

定比(e)叫做离心率. [74]

课题 1

作双曲线上的点.

过焦点且垂直于准线的直线是对称轴.

求顶点 A 和A'.

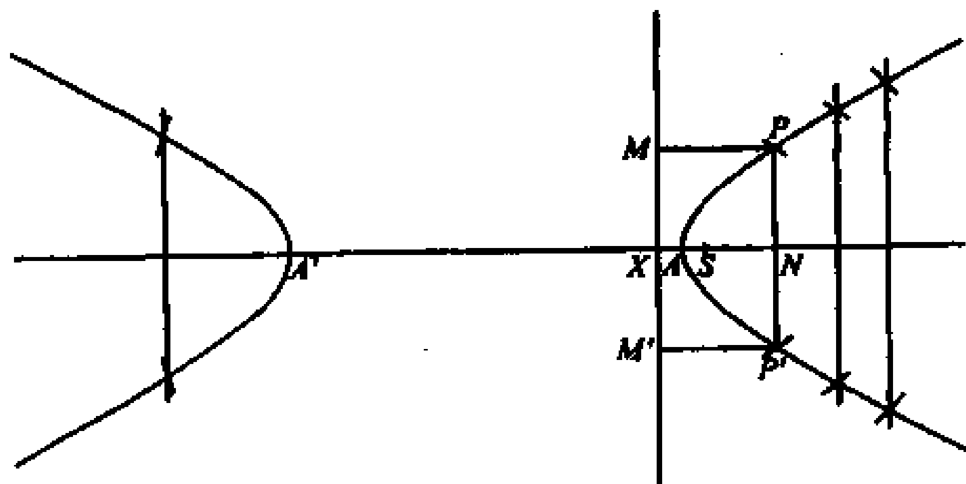


图 4-1

［解］ 从焦点 S 作 SX 垂直于准线［垂足为 X］. 作 XS 的分点 A，使

$$SA = e \cdot AX;$$

再在 SX 的延长线上取点 A'，使

$$SA' = e \cdot A'X.$$

那么 A 和 A' 是曲线上的点.

在直线 AA' 上任取一点 N，以 S 为圆心、$e \cdot NX$ 为半径作圆，过 N 作直线 PNP' 垂直于 AA'，交圆于 P 和 P'，则 P 和 P' 是双曲线上的点. 作 PM，$P'M'$ 垂直于准线［垂足为 M，M'］，则

$$SP = e \cdot NX = e \cdot PM,$$

$$SP' = e \cdot NX = e \cdot P'M'.$$

这样，对应于直线 AA' 上任一点 N，我们得到两点 P 和 P'，它们在 AA' 异侧，并且到它等距离. 所以双曲线关于 AA' 对称，即 AA' 是一条［对称］轴，点 A 和 A' 是顶点.

注：可以证明，当 N 在轴 AA' 上但不在 A 与 A' 之间时，圆与垂线 NP 相交. 因而双曲线在过 A 与 A' 垂直于轴的两条直线的外部，向两侧无限延
［75］ 伸.（参考附录.）

命题 2

如果［双曲线的］弦 PP'［的延长线］交准线于 K，那么 SK 平分 SP 与 SP' 的夹角.

［证明］ 连结 SP，SP'，SK；延长 PS 到 p［p 是与双曲线的交点］，并且作 PM，$P'M'$ 垂直于准线［垂足为 M 和 M'］. 那么

$$SP = e \cdot PM,$$

$$SP' = e \cdot P'M'.$$

$$\therefore \quad SP : SP' = PM : P'M'$$

$$= PK : P'K,$$

其中最后一步利用了相似三角形 PKM 和 $P'KM'$.

所以 SK 平分 $\angle P'Sp$.（Euc. Ⅵ. A.）

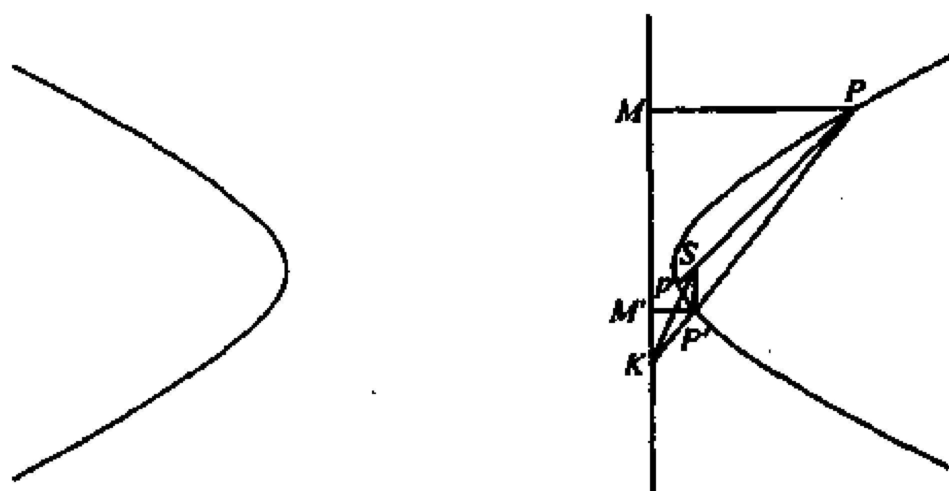


图 4－2a [76]

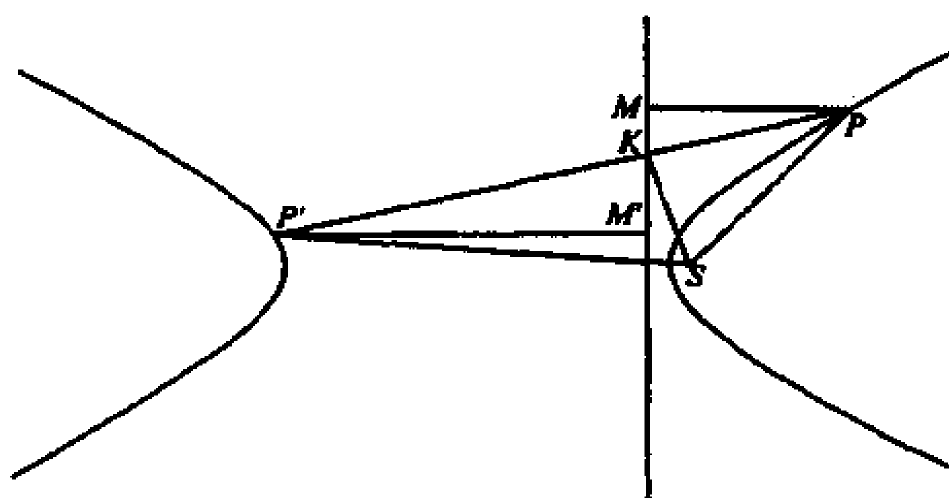


图 4－2b

类似地，[如图 4－2b，]若 P 和 P' 在双曲线的不同分支上，SK 平分$\angle PSP'$.

［练习］ 求证：一条直线与一条双曲线只能相交于[至多]两点.

问　　题

命题 1

1. 在一条圆锥曲线中，如果[从曲线上任一点 P]作 PR 平行于一条定直线，交准线于 R，那么 $SP:PR$ 是常数.

2. 如果一个椭圆、一条抛物线和一条双曲线有相同的交点和准线，那么椭圆完全位于抛物线的一侧，而双曲线位于抛物线的另一侧.

3. 在一条圆锥曲线中，过焦点的弦被焦点和准线调和分割.

命题 2

1. 求证：一条直线与一条圆锥曲线只能相交于[至多]两点.

2. 在一条圆锥曲线中，将曲线上两个定点 P, P' 与曲线上一个动点
[77] Q 相连，并设直线 $PQ, P'Q$ 交准线于 p, p'，那么 $\angle pSp'$ 的大小一定.

命题 3

若 PN 是双曲线上一点 P 的纵标线，则 $PN^2 : AN \cdot A'N$ 是定比.

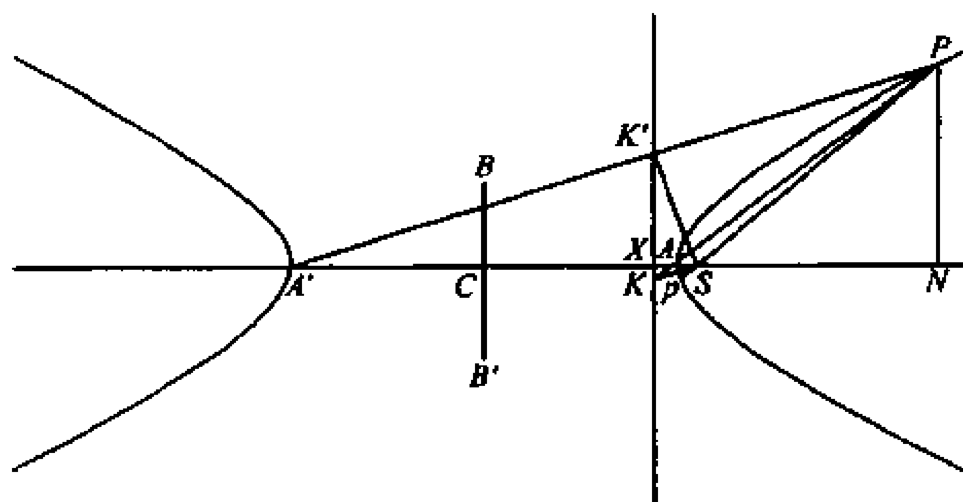


图 4-3

[证明] 连结 PA, PA'，必要时延长之，设此二直线交准线于 K 和 K'.

[78] 连结 SP, SK, SK'，并且延长 PS 到[与双曲线相交于点] p.

由相似三角形 PAN, KAX，得

$$PN : AN = KX : AX;$$

由相似三角形 $PA'N, K'A'X$，得

$$PN : A'N = K'X : A'X.$$

$$\therefore \quad PN^2 : AN \cdot A'N = KX \cdot K'X : AX \cdot A'X.$$

但是 SK 平分$\angle ASp$(命题 2),SK' 平分$\angle ASP$(命题 2),

$$\therefore \quad \angle KSK' 为直角;$$

$$\therefore \quad KX \cdot K'X = SX^2; \quad (\text{Euc. VI. 8.})$$

$$\therefore \quad PN^2 : AN \cdot A'N = SX^2 : AX \cdot A'X.$$

上式右边的比是一个定比.

定义 [取 AA' 的中点 C,]作 CB 垂直于 AA',并在垂线上取点 B,使 $CB^2 : CA^2$ 等于上述定比.那么

1. AA' 叫做横轴.
2. C 叫做曲线的中心.
3. CB 叫做共轭半轴.

这样一来,

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2.$$

问　　题

1. 设 PNP' 是椭圆的一条双纵标线[A 和 A' 是顶点].求 AP 与 $A'P'$ 的交点的轨迹.

2. [满足 $CB = CA$ 的双曲线叫做直角双曲线.求证:]在直角双曲线中,$PN^2 = AN \cdot A'N$.

3. 设 PNP' 是直角双曲线的一条双纵标线[A 和 A' 是顶点].求证:角 PAP',$PA'P'$ 互补.

4. 设圆在其任意点 P 的切线与一条定直径 AB 的延长线相交于点 T.求证:过 T 点而垂直于此直径的直线与 AP,BP 的延长线的交点在某条直角双曲线上. 【79】

命题 4

通过轴 ACA',BCB' 端点作垂线,围成矩形,将矩形对角线延长,与纵标线 NP 向两侧的延长线交于 p,p',那么 $Pp \cdot Pp' = CB^2$.

并且,[向两侧伸展时,]曲线将持续逼近每条对角线而不与

它们相交，且其间距离可减小到小于任何[指定的]有限长度.

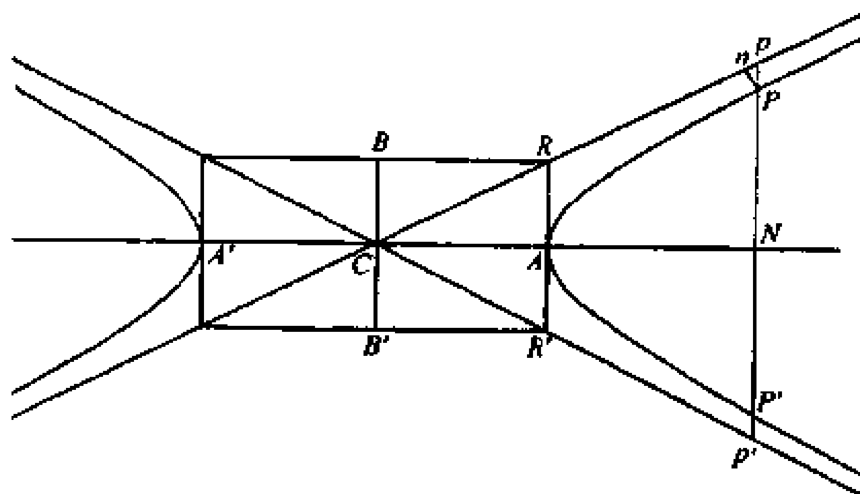


图 4-4

[证明] 设[分别]过 A 和 B 而平行于轴的直线相交于点 R，并设 Pp' 交曲线于 P'.

那么 PP'，pp' 都在点 N 被平分.(命题 1)

$$\therefore \quad pP' = p'P.$$

但是

$$pP \cdot pP' = Np^2 - PN^2; \quad (\text{Euc. II. 5.})$$

[80] $$\therefore \quad pP \cdot p'P = pN^2 - PN^2.$$

现在 $$pN^2 : CN^2 = AR^2 : CA^2$$
$$= CB^2 : CA^2.$$

又因为

$$PN^2 : AN \cdot A'N = CB^2 : CA^2, \quad (\text{命题 } 3)$$

即

$$PN^2 : CN^2 - CA^2 = CB^2 : CA^2. \quad (\text{Euc. II. 6.})$$

由此得

$$pN^2 - PN^2 : CA^2 = CB^2 : CA^2;$$

$$\therefore \quad pN^2 - PN^2 = CB^2;$$

$$\therefore \quad pP \cdot p'P = CB^2.$$

因为乘积 $pP \cdot p'P$ 是常数,其中的一个因子 $p'P$[当曲线向远方伸展时]一路增大,所以 pP 一路减小,最后变成小于任一有限量. 又若作 Pn 垂直于[矩形对角线] CR,则 $Pn : Pp$ 是定比,所以 Pn 也持续减小,最后变成小于任一有限长度.

定义 如果一条曲线持续趋近于一条固定直线但不与它实际相交,而使到此直线的距离能最后变成小于任一有限长度,就说这条直线是曲线的一条渐近线.

定义 当双曲线的两条渐近线成直角时,此曲线称为直角双曲线. 在直角双曲线中,两个轴[CA 和 CB]显然相等. 所以这种曲线有时也叫做等轴双曲线.

注:我们将把直角双曲线(Rectangular hyperbola)缩写成 R.H. 【81】

命题 5

双曲线关于共轭轴对称,因而有第二个焦点和第二条准线. 通过 C 点的所有弦都被 C 点平分.

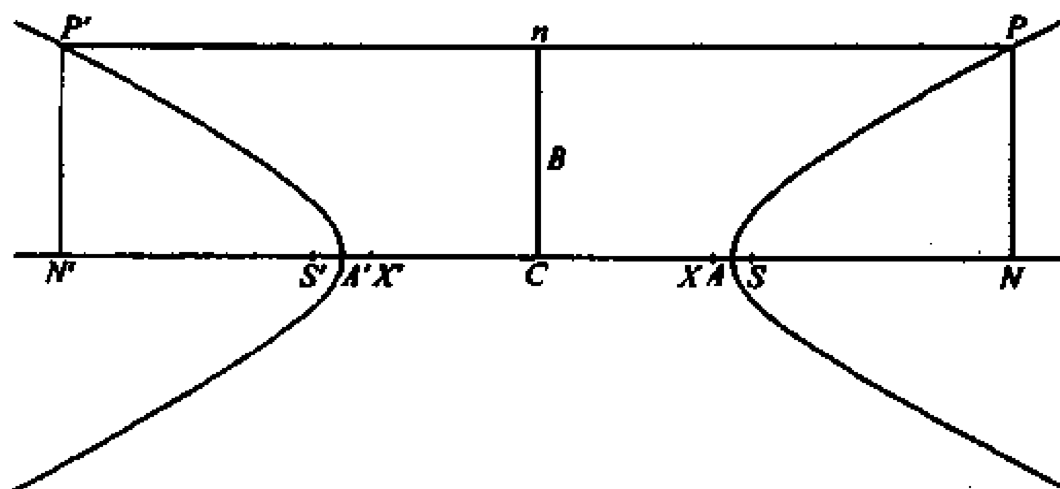


图 4-5

[证明] 作纵标线 PN,并[在轴上向 C 点异侧]取 CN' =

CN.

因为 P 在双曲线上,所以 $CN > CA$.

$$\therefore \quad CN' > CA'.$$

因而过 N' 的垂线与双曲线相交.

设其交点为 P'.那么

$$P'N'^2 : AN' \cdot A'N' = PN^2 : AN \cdot A'N. \quad (命题 3)$$

但是

$$A'N' = AN, AN' = A'N,$$

$$\therefore \quad AN' \cdot A'N' = AN \cdot A'N;$$

$$\therefore \quad P'N'^2 = PN^2,$$

【82】 $$\therefore \quad P'N' = PN.$$

连结 PP',交 CB 或 CB 的延长线于 n.

那么 $P'nP$ 平行于轴,因而垂直于 BC,且 $Pn = P'n$.

因此,对应于双曲线上任一点 P,在 CB 的异侧存在双曲线上另外一点 P',使得 PP' 被 CB 垂直平分,即双曲线关于共轭轴对称.

如果我们[在长轴上从中心 C 向两侧]取 CS' 等于 CS,CX' 等于 CX,并且过 X' 作直线垂直于 AA',那么双曲线也可描绘成

【83】以所作直线为准线、S' 为焦点,离心率与前面相同.

命题 6

[设双曲线的中心为 C,轴为 AA',焦点为 S 和 S',离心率为 e,直线 AA' 与两条准线的交点分别为 X 和 X',则有]

$$SA = e \cdot AX, CA = e \cdot CX,$$

$$CS = e \cdot CA, CA^2 = CS \cdot CX.$$

[证明] 因为 A 和 A' 是双曲线上的点,

$$\therefore \quad SA = e \cdot AX, \quad (定义)$$

$$SA' = e \cdot A'X \quad (定义)$$

$$= e \cdot AX'.$$

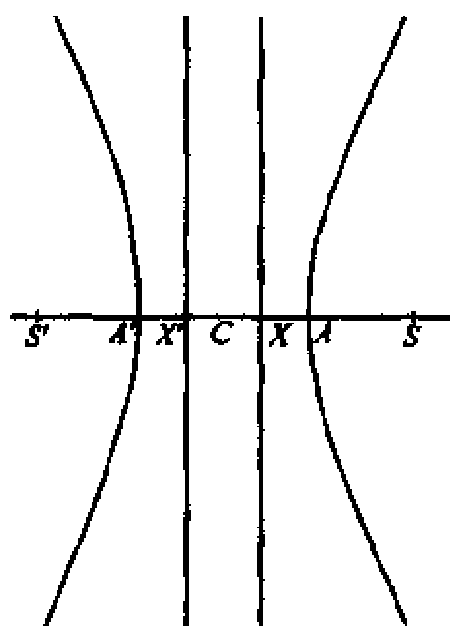


图 4-6

两式相减，得

$$AA' = e \cdot XX';$$

$$\therefore \quad CA = e \cdot CX. \qquad ①$$

改为两式相加，则得

$$SS' = e \cdot AA',$$

$$\therefore \quad CS = e \cdot CA. \qquad ②$$

[将②式两边对调后，与①式相乘，又得到]

$$CA^2 = CS \cdot CX. \qquad ③$$

注：在本题图形中，离心率约为 2.2，而在命题 5 的图形中，离心率只有 1.1，同学们要注意这个差别怎样影响到点 S, A, X 的相关位置和整个曲线的形状．在本图中，$CB = 2CA$；而在前一命题图形中，$CA = 2CB$．

问　　题

1．如果[双曲线的]一条渐近线交准线于 E，则 $CE = CA$，且 CES 是直角．

2．如果[过双曲线上任一点 P]作 Pp 平行于渐近线，交准线于 p，那么 $Pp = SP$．

3. 已知[双曲线的]横轴和共轭轴,求焦点和准线.

4. 以 AA' 为直径的圆与[双曲线的]准线的交点,同时也是与渐近线
【84】 的交点.

课题 7

[设双曲线的焦点为 S 和 S',横轴为 AA',P 是双曲线上的任意点,则]

$$|S'P - SP| = AA'.$$

双曲线的机械作图法.

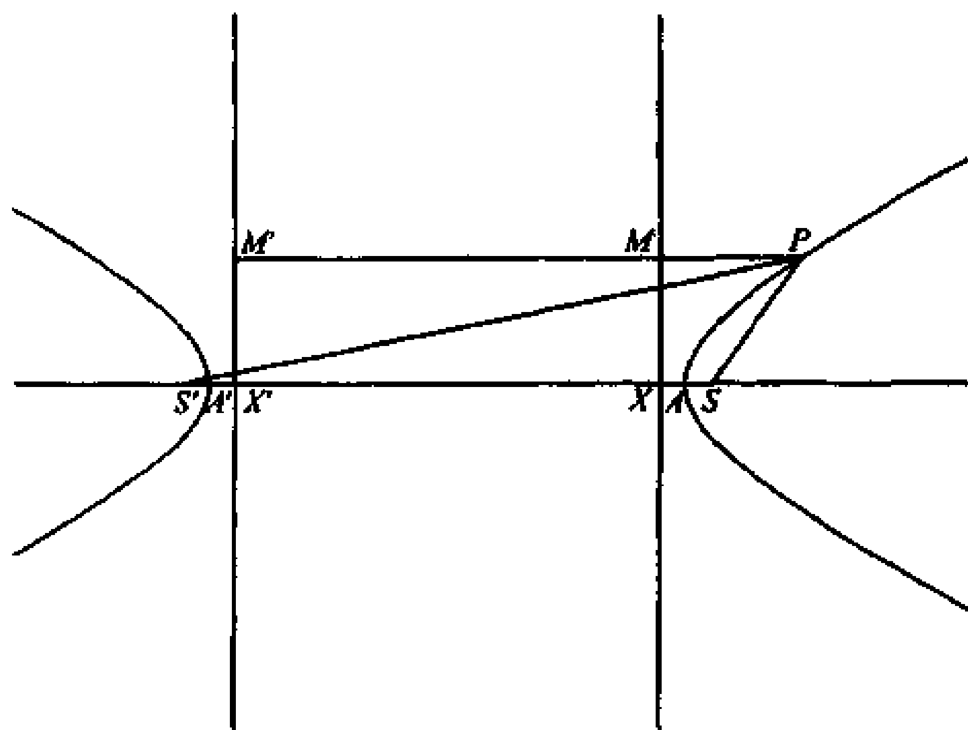


图 4-7a

[解] 作 PMM' 垂直于准线[垂足为 M 和 M'],则

$$SP = e \cdot PM,$$

$$S'P = e \cdot PM';$$

$$\therefore \quad |S'P - SP| = e \cdot MM'$$

$$= e \cdot XX'$$

$$= AA'.$$ [85]

因此得到以下的机械作图法.

设 $S'K$ 是一根木杆,在点 S' 处装有铰链,SPK 是一根弦,两端固定在 S 和 K,并且在[杆上一点]P 处被拉紧.那么

$$S'P + PK = 常数,$$

并且

$$SP + PK = 常数,$$

$$\therefore \quad S'P - SP = 常数.$$

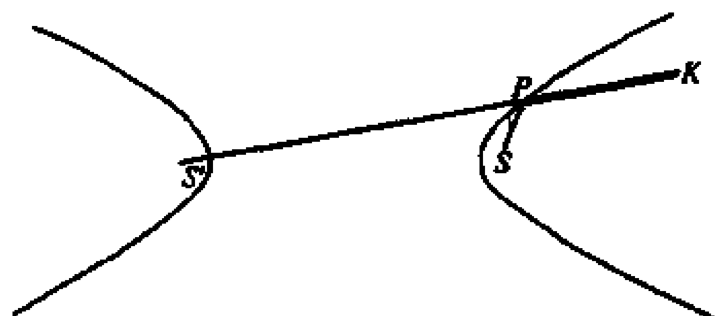


图 4－7b

问　　题

1. 与两个定圆都相切的圆的圆心轨迹是一个椭圆或一条双曲线.

2. 已知椭圆的一个焦点和这曲线上两点,则另一焦点的轨迹是一条双曲线.

注:本章图形可利用一个木制圆锥被一个垂直于底面的平面截得,参考下章命题 3. [86]

命题 8

在双曲线中,

$$CB^2 = CS^2 - CA^2 = SA \cdot SA'.$$

[证明]

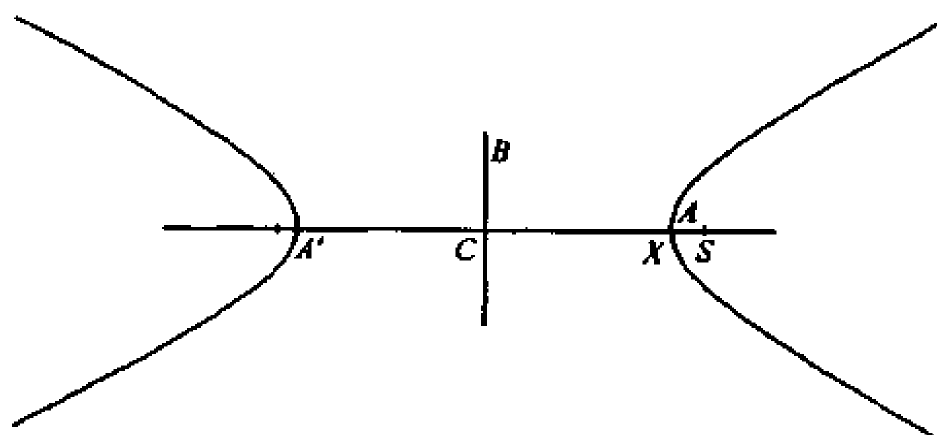


图 4-8

$$CS : CA = SA : AX, \quad (\text{命题 } 6)$$

$$\therefore \quad CS + CA : CA = SA + AX : AX$$

$$= SX : AX; \qquad ①$$

$$CS : CA = SA' : A'X, \quad (\text{命题 } 6)$$

$$\therefore \quad CS - CA : CA = SA' - A'X : A'X$$

$$= SX : A'X. \qquad ②$$

将①式与②式相乘，得

$$CS^2 - CA^2 : CA^2 = SX^2 : AX \cdot A'X$$

$$= CB^2 : CA^2. \quad (\text{命题 } 3)$$

$$\therefore \quad CS^2 - CA^2 = CB^2 = AS \cdot A'S. \quad (\text{Euc. II. 5.})$$

问　　题

1. [求证:]在 R. H. [即直角双曲线]中，$e = \sqrt{2}$, $CS^2 = 2AC^2$, $CS = 2CX$.

2. 如果[双曲线的]一条渐近线交准线于 E，交顶点处的切线于 H，
[87] 那么 $SE = BC$，并且 SH 平行于 AE.

通过[双曲线的一个]焦点的双纵标线(LL')叫做正焦弦.

命题 9

[在双曲线中,]

$$SL \cdot CA = CB^2.$$

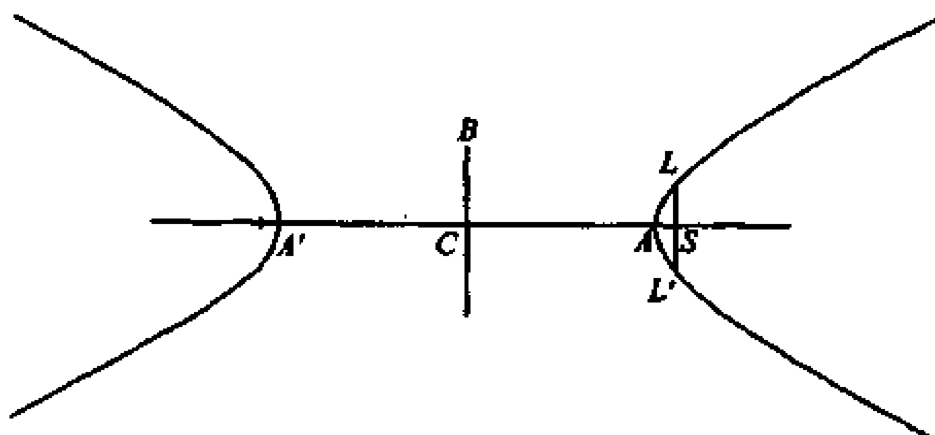


图 4-9

［证明］ $SL^2 : AS \cdot A'S = CB^2 : CA^2$,（命题 3）

而
$$AS \cdot A'S = CB^2,$$
$$\therefore \quad SL^2 : CB^2 = CB^2 : CA^2,$$
$$\therefore \quad SL : CB = CB : CA,$$
$$\therefore \quad SL \cdot CA = CB^2.$$

问　　题

1. 利用命题 6 和 8 证明命题 9.
2. 在 R.H.［直角双曲线］中，$SL = CA$. [88]

命题 10

如果在［双曲线上任一点］P 处的切线交准线于 Z，那么 $\angle PSZ$ 是直角.

焦点弦两端的两条切线相交在准线上.

［证明］ 在双曲线上取一个靠近 P 的点 P'，并设弦 PP' 交准线于 K，延长 PS 到［双曲线上的点］p，那么 KS 平分 $\angle P'Sp$.（命题 2）

当 P' 与 P 重合时（如图 4-10 右），$PP'K$ 成为切线 PZ，SK



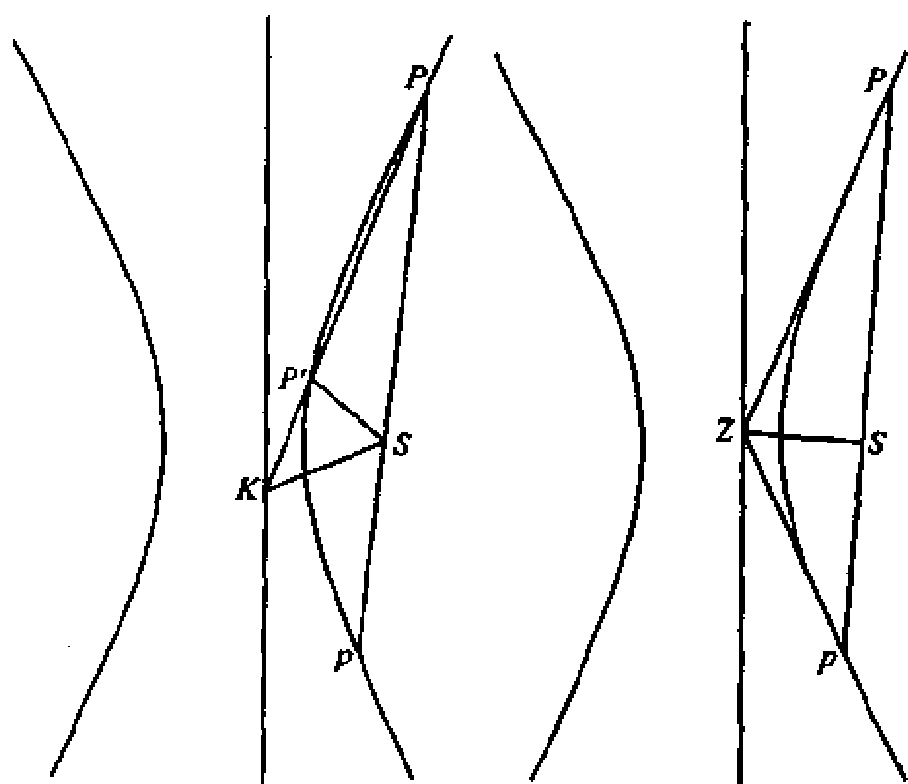


图 4-10

与SZ重合，$\angle P'Sp$成为二直角；因而$\angle PSZ$为直角.

所以，$\angle ZSp$是直角，并且Zp是p点处的切线，即P点和p点处的切线相交在准线上.

问　　题

【89】　如果ZP，Zp与正焦弦的延长线相交于点D和d，求证：$SD=Sd$.

命题 11

如果在[双曲线的任一点]P处的法线交横轴于G，[并设双曲线的离心率为e，且S是它的一个焦点，]那么

$$SG=e\cdot SP.$$

[证明]　作切线PZ[交准线于Z]，连结SZ，作PM垂直于准线[垂足为M]，连结SM.

$\angle ZMP$和$\angle ZSP$是直角，(命题 10)

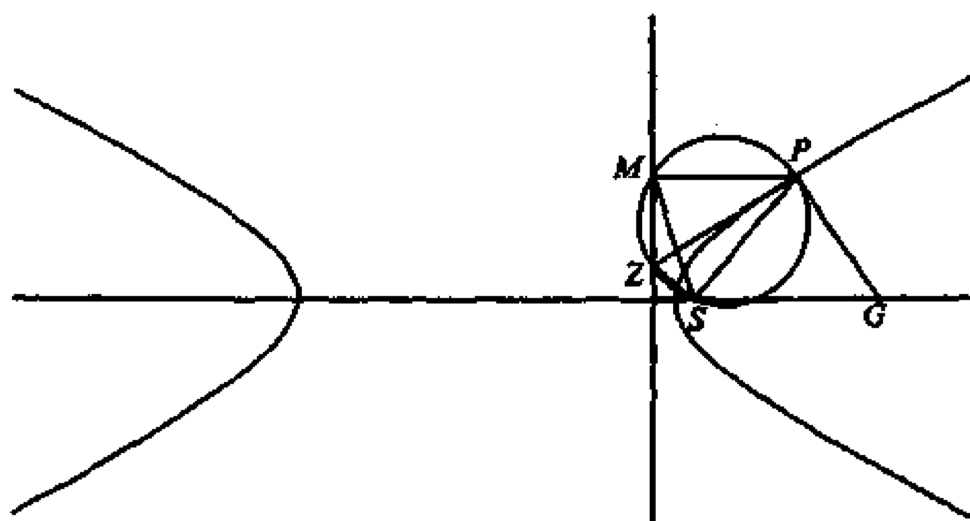


图 4-11

因而以 ZP 为直径的圆通过 M 和 S.(Euc. Ⅲ. 31.)

因为$\angle ZPG$ 是直角,所以 PG 与圆相切. (Euc. Ⅲ. 16.)

所以同弧上的[弦切角]$\angle SPG$ = [圆周角]$\angle SMP$.(Euc. Ⅲ. 32.)

此外又有$\angle GSP = \angle SPM$. (Euc. Ⅰ. 29.)

所以三角形 SPG 与 PMS 相似,

$$\therefore \quad SG:SP = SP:PM;$$

$$\therefore \quad SG = e\cdot SP.$$ [90]

命题 12

双曲线在其任一点 P 的切线和法线分别平分[P 点处]两条焦半径所成的内角和外角.

[证明] 设 TP 是切线,PG 是法线,交横轴于 T 和 G.那么

$$SG = e\cdot SP, \quad (\text{命题 } 11)$$

$$S'G = e\cdot S'P.$$

$$\therefore \quad SG:S'G = SP:S'P,$$

因而 PG 平分$\angle SPS'$的外角.(Euc. Ⅵ. A.)

进而得到余$\angle SPT$ 和$\angle S'PT$ 相等,所以 PT 平分$\angle SPS'$.

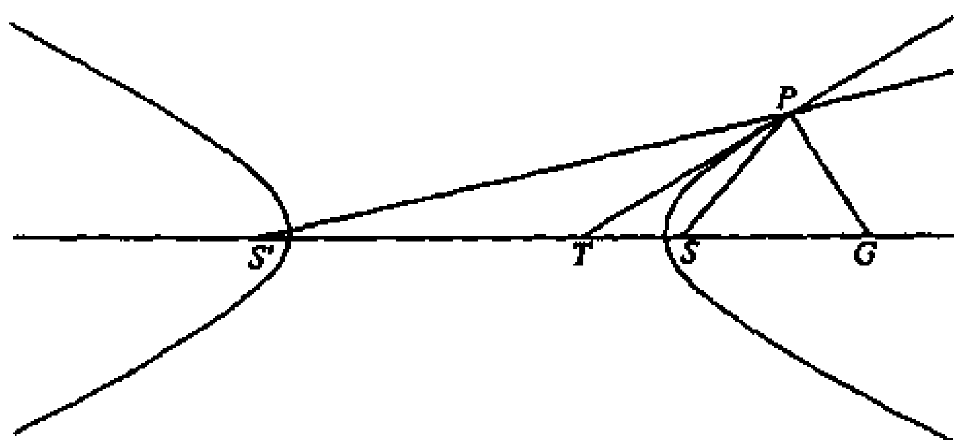


图 4－12

注：可将以上命题与椭圆的命题 13 相比较.

问　　题

1．已知双曲线的一个焦点，曲线上一点和在该点的切线，求另一焦点的轨迹.

2．如果一个椭圆和一条双曲线有相同的焦点，那么它们相交成直角

【91】［即交点处的切线互相垂直］.

命题 13

从［双曲线的］焦点到［这双曲线上任一点］P 处的切线作垂线（SY，$S'Y'$），垂足必在以 AA' 为直径的圆上.

又若［从双曲线的中心 C］作 P 点处切线的平行线 CE，交 $S'P$ 于 E，则 $PE = CA$.

此外还有

$$SY \cdot S'Y' = CB^2.$$

［证明］ 延长 SY，交 $S'P$ 于 W. 连结 CY.

在三角形 YPS 和 YPW 中，YP 是公共边，直角 $\angle PYS$，$\angle PYW$ 相等，并且

$$\angle YPS = \angle YPW, \quad (命题\ 12)$$

［因而这两个三角形全等.］

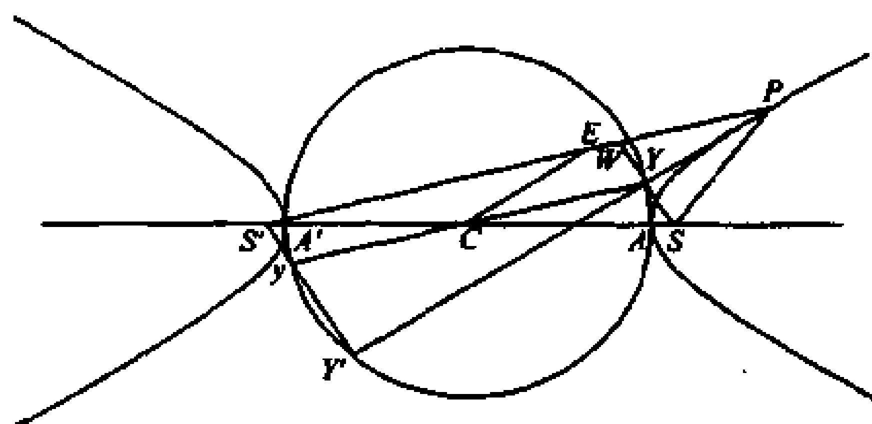


图 4-13

$$\therefore\quad SY = YW, SP = PW;\quad \text{(Euc. I. 26.)}$$

因而 $S'W$ 平行于 CY.(Euc. Ⅵ. 2.)

$$\therefore\quad CY = \frac{1}{2}S'W\quad \text{(Euc. VI. 4.)}$$

$$= \frac{1}{2}(S'P - SP)$$

$$= \frac{1}{2}AA'\quad \text{(命题 7)}$$

$$= CA;$$

所以 Y 在以 AA' 为直径的圆上.

类似地,Y' 也在辅助圆[即以 AA' 为直径的圆]上.

又因为 $YCEP$ 是平行四边形,所以

$$PE = CY = CA.$$

设 $Y'S'$ 交圆于 y,连结 Yy.

那么[圆周角]$\angle YY'y$ 是直角,因而 Yy 通过圆心 C.(Euc. Ⅲ. 31.)

由此得

$$SY = S'y,\quad \text{(Euc. I. 4.)}$$

因而

$$SY \cdot S'Y' = S'y \cdot S'Y'$$

$$= AS' \cdot S'A'\quad \text{(Euc. III. 35.)}$$

$= CB^2$.（命题 8）

问　题

【92】　第 3 章"椭圆"命题 14 后面的问题 1－7 对于双曲线也都正确.

命题 14

若[双曲线在其]点 P 处的切线交横轴于 T，[PN 垂直于横轴，垂足为 N，C 是中心，A 是一个顶点，]则

$$CN \cdot CT = CA^2.$$

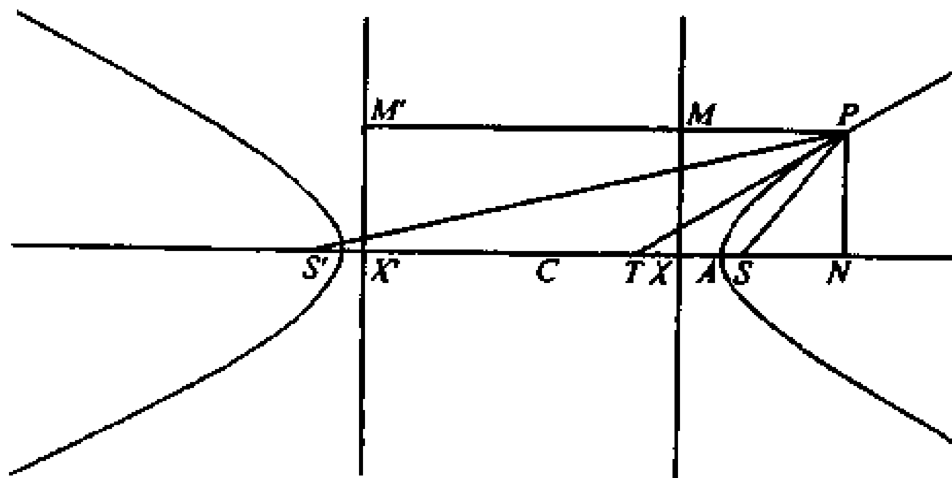


图 4－14

[证明]　作 PMM' 垂直于准线.

连结 SP，SP'. 那么：

$\because$　PT 平分$\angle SPS'$，（命题 12）

$\therefore$　$ST:S'T = SP:S'P$　（Euc. Ⅵ. A.）

$= PM:P'M$

$= NX:NX'$；

$\therefore$　$ST + S'T : |S'T - ST| = NX + NX' : |NX' - NX|$；

$\therefore$　$2CS:2CT = 2CN:2CX$；

$\therefore$　$CN \cdot CT = CS \cdot CX$

$= CA^2$. （命题 6）

问　　题

1. 用这里的方法证明椭圆的命题 16.

2. [如图 4－14,从 T 点]作轴的垂线 Tp,交辅助圆于 p.求证:Np 是圆的切线.

3. 求证:$CN \cdot NT = AN \cdot NA'$. 【93】

命题 15

如果[双曲线在其]点 P 处的切线交共轭轴延长线于 t,且 Pn 是从 P 点到共轭轴的垂线[垂足为 n],则

$$Cn \cdot Ct = CB^2.$$

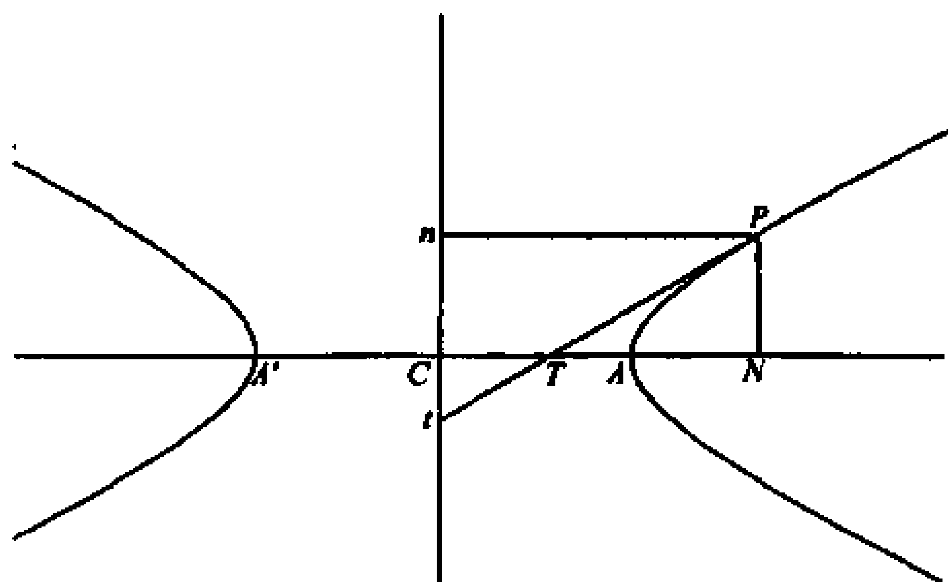


图 4－15

[证明]　作纵标线 PN.

那么,由相似三角形得

$$TN : CT = PN : Ct.$$

$$\therefore \quad TN \cdot CN : CN \cdot CT = PN^2 : Ct \cdot PN;$$

$$\therefore \quad TN \cdot CN : CA^2 = PN^2 : Ct \cdot Cn. \quad (\text{命题 } 14)$$

但是 $TN \cdot CN = CN^2 - CT \cdot CN$

$$= CN^2 - CA^2 \quad (\text{命题 } 14)$$

$$= AN \cdot A'N; \quad (\text{Euc. II. 5.})$$

$$\therefore \quad AN \cdot A'N : CA^2 = PN^2 : Ct \cdot Cn.$$

因而，变形得

$$AN \cdot A'N : PN^2 = CA^2 : Ct \cdot Cn.$$

但是

$$AN \cdot A'N : PN^2 = CA^2 : CB^2, \quad (\text{命题 } 3)$$

[94] $$\therefore \quad Cn \cdot Ct = CB^2.$$

命题 16

过[双曲线的中心]C 作直线平行于[双曲线上一]点 P 处的切线，再从 P 点作这平行线的垂线 PF[垂足为 F]，又设 P 点处的法线与共轭轴相交于g，那么

$$PF \cdot PG = CB^2, \quad PF \cdot Pg = CA^2.$$

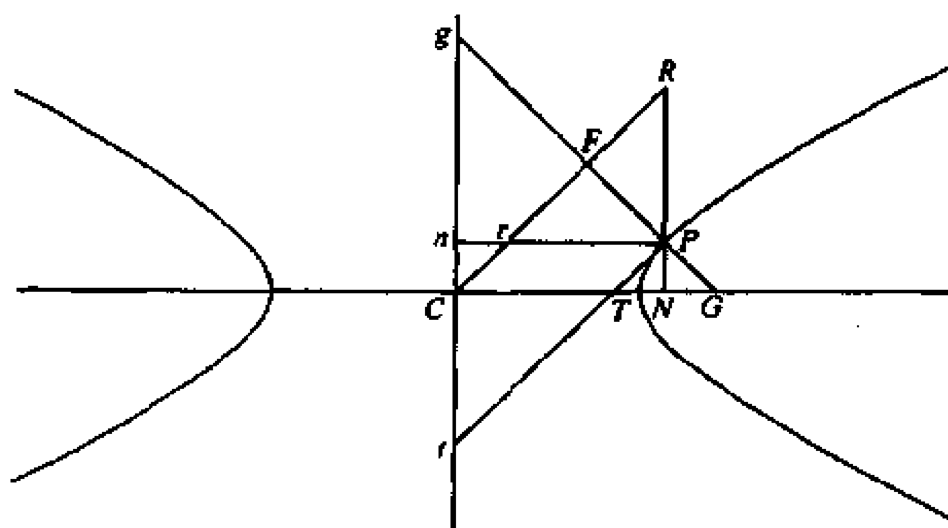


图 4-16

[证明] 作 RNP 和Prn 分别垂直于两轴，交 CF 于R 和r，并设 P 点处的切线交轴于T 和t.

那么,因为点 N 处和 F 处的角都是直角,所以 G,N,F,R 四点共圆.(Euc. Ⅲ. 22.)

所以 $$PG\cdot PF=PN\cdot PR\quad(\text{Euc. Ⅲ. 35.})$$
$$=Cn\cdot Ct=CB^2.\quad(\text{命题 15})$$

又因为点 F 处和 n 处的角都是直角,所以 g,F,r,n 四点共圆.

$$\therefore\quad PF\cdot Pg=Pn\cdot Pr\quad(\text{Euc. Ⅲ. 36.})$$
$$=CN\cdot CT=CA^2.\quad(\text{命题 14})$$

注:以后将会看到,这里的直线 CFR,其实就是与 CP 共轭的直径 CD. [95]

命题 17

[设双曲线在其任意点 P 处的法线交横轴于 G;PN 垂直于横轴,垂足为 N;又设椭圆的离心率为 e,那么]

$$NG:CN=CB^2:CA^2,$$
$$CG=e^2\cdot CN.$$

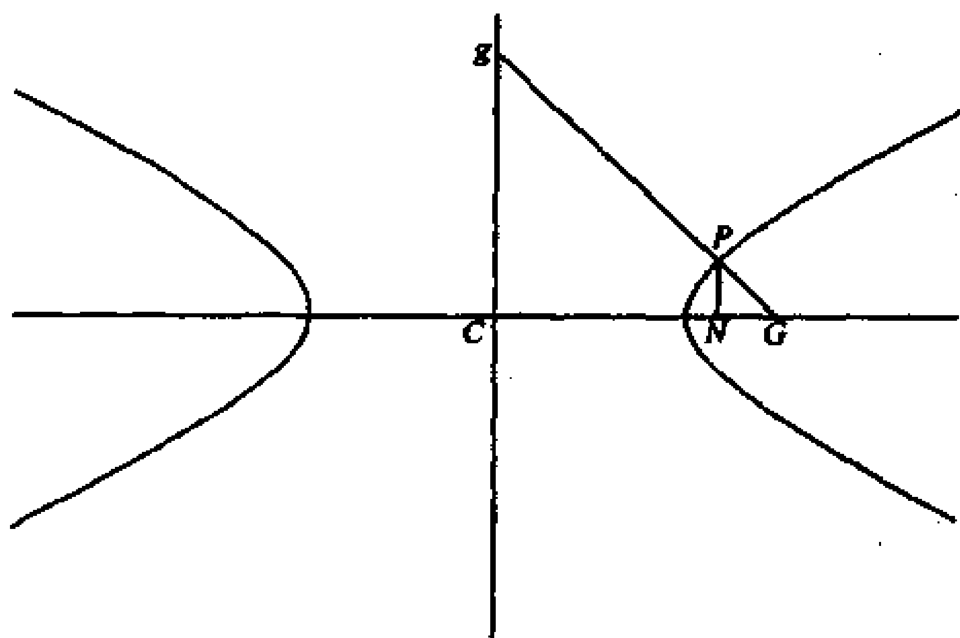


图 4-17

[证明] 延长 GP,交共轭轴于 g.

[从中心 C 作 CF 平行于 P 点处的切线,交 Pg 于 F,参阅图 4-16.]那么

$$NG:CN = PG:Pg \quad (\text{Euc. VI. 2.})$$
$$= PG\cdot PF:Pg\cdot PF$$
$$= CB^2:CA^2. \quad (\text{命题 16})$$

进而,因为

$$NG:CN = CB^2:CA^2,$$
$$\therefore \quad CN+NG:CN = CA^2+CB^2:CA^2;$$
$$\therefore \quad CG:CN = CS^2:CA^2 \quad (\text{命题 8})$$
$$= e^2:1. \quad (\text{命题 6})$$
$$\therefore \quad CG = e^2\cdot CN.$$

问　　题

1. 求证:$CG\cdot Cn:Cg\cdot CN = BC^2:AC^2$.
2. 在 R.H.[即直角双曲线]中,求证:
(1) $CN = NG$;
[96] (2) $PG = Pg = CP$.

命题 18

如果从[双曲线在其点]P 处切线上的任一点 O 作 OI 垂直于准线,OU 垂直于 SP,那么 $SU = e\cdot OI$.(亚当斯性质)

[证明] [设切线与准线的交点为 Z,]连结 SZ,作 PM 垂直于准线[垂足为 M].

那么,因为$\angle ZSP$ 是直角,所以 ZS 平行于 OU.

$$\therefore \quad SU:SP = ZO:ZP$$
$$= OI:MP.$$
$$\therefore \quad SU:OI = SP:MP$$

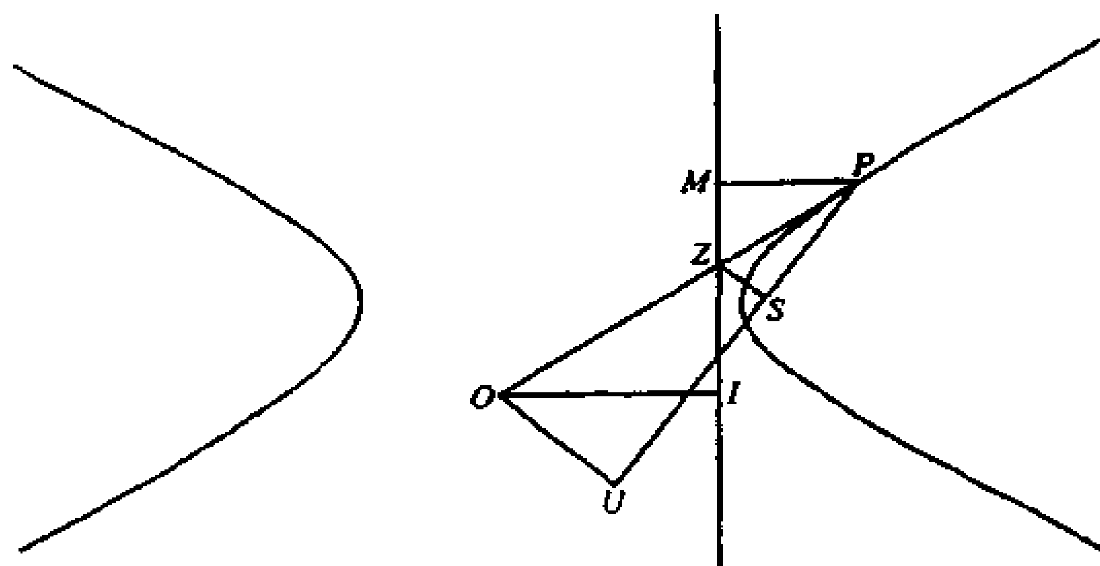


图 4－18

$$= e : 1.$$

$$\therefore \quad SU = e \cdot OI.$$

注：如果 O 是切线上一点，由它到横轴作垂线 OQQ'，交曲线于 Q 和 Q'，那么 $SU = SQ$，并且 $OU^2 = OQ \cdot OQ'$．见关于椭圆的命题 20，第 2 幅图．【97】

作图题 19

从双曲线两支之间一点 O 作两条切线 OQ，OQ'．

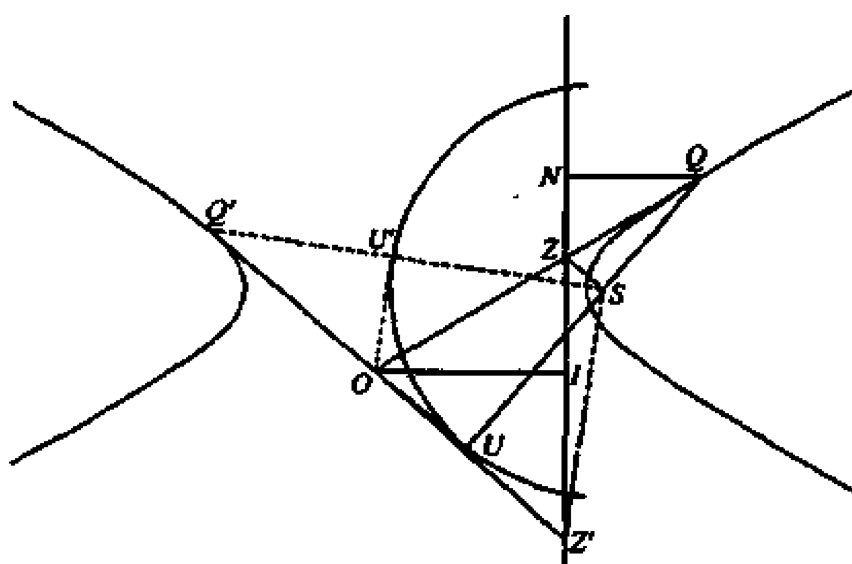


图 4－19

[解] 作 OI 垂直于准线[垂足为 I].以[焦点]S 为圆心、$e\cdot OI$ 为半径[e 是离心率]作圆,并从 O 点作圆的切线 OU,OU'[切点为 U,U'].

作 SZ 垂直于 SU,交准线于 Z.连结 ZO,并延长之,交 SU 于 Q.作 QN 垂直于准线[垂足为 N].那么

$$SQ:SU=QZ:OZ$$
$$=QN:OI;$$
$$\therefore\quad SQ:QN=SU:OI=e:1;$$

所以 Q 在双曲线上.

又因为$\angle QSZ$ 是直角,所以 OQ 是双曲线在 Q 点的切线.(命题 10)

类似地,作 SZ' 垂直于 SU'[交准线于 Z'],连结 OZ' 并延长,交 SU' 于 Q',则 OQ' 是另一条切线.

注:本题是利用命题 18 的原理来解的,也可根据命题 12 或 13 得到
[98] 一种作法.

命题 20

[双曲线的]切线 OQ,OQ' 对于焦点 S 的张角$\angle OSQ$,$\angle OSQ'$相等或互补,视 Q 与 Q' 在双曲线的同支或不同支而定.

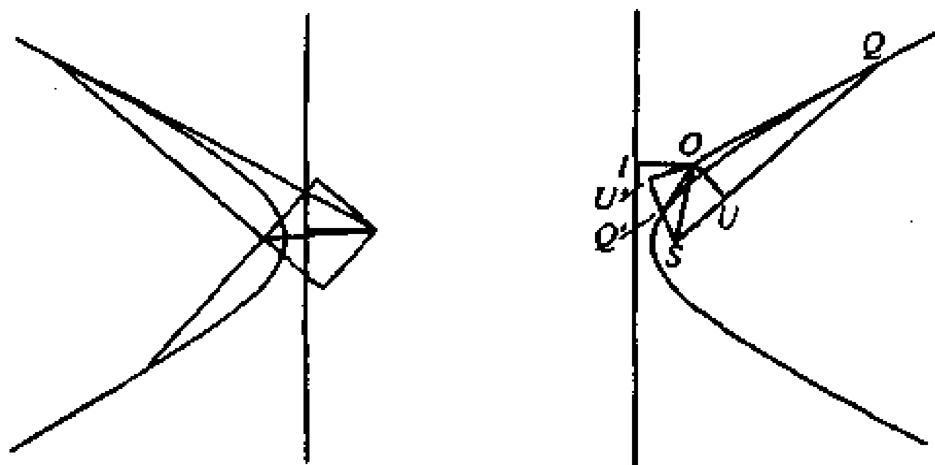


图 4-20a

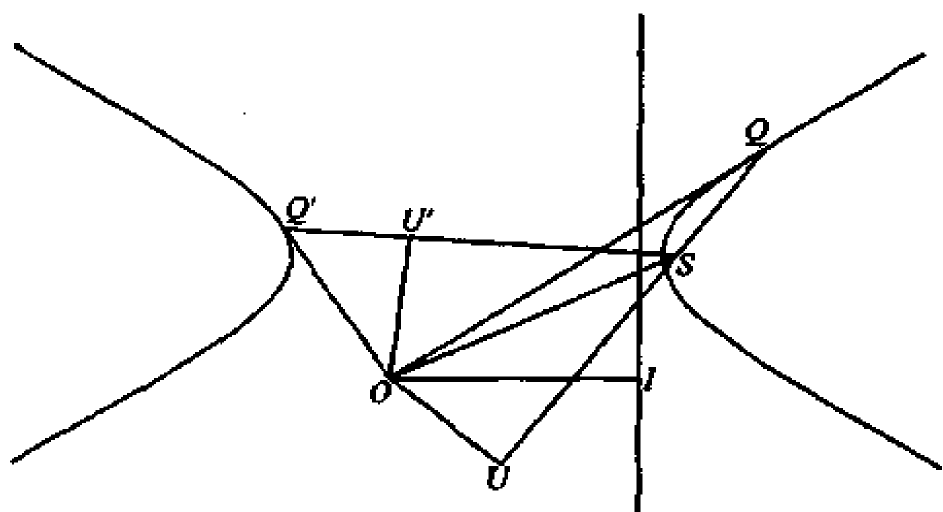


图 4－20b

［证明］ 作 OI 垂直于准线［垂足为 I］.

连结 OS，SQ，SQ'，并且作 OU，OU'，使它们分别垂直于 SQ，SQ'［垂足为 U，U'］，那么

$$SU = e \cdot OI = SU'. \quad (\text{命题 } 18)$$

所以三角形 OSU，OSU'全等.（Euc. Ⅰ. 26.）

因而$\angle OSU = \angle OSU'$.

所以，在图 4－20a 中，$\angle OSQ = \angle OSQ'$，

而在图 4－20b 中，$\angle OSQ$ 与$\angle OSQ'$互补.

注：如果 O 点在两条准线之间，则需利用图 4－20a 中的左边部分. 【99】

问　题

1. ［双曲线的］任意一条切线被夹在两顶点处切线之间的部分对于每个焦点的张角都是常数.

2. ［设双曲线的焦点为 S 和S'，P 是曲线上任一点，则］三角形 SPS' 的内切圆心的轨迹是一条直线.

3. 在一条圆锥曲线中，［若 OQ 和OQ'是两条切线，切点为 Q 和Q'，S 是焦点，则］弦 QQ'被 SO 和准线调和分割.

命题 21

［双曲线的切线］OQ，OQ'分别与 OS，OS'夹角相等或互

补,视切点 Q 和 Q' 位于双曲线的不同分支或相同分支而定.

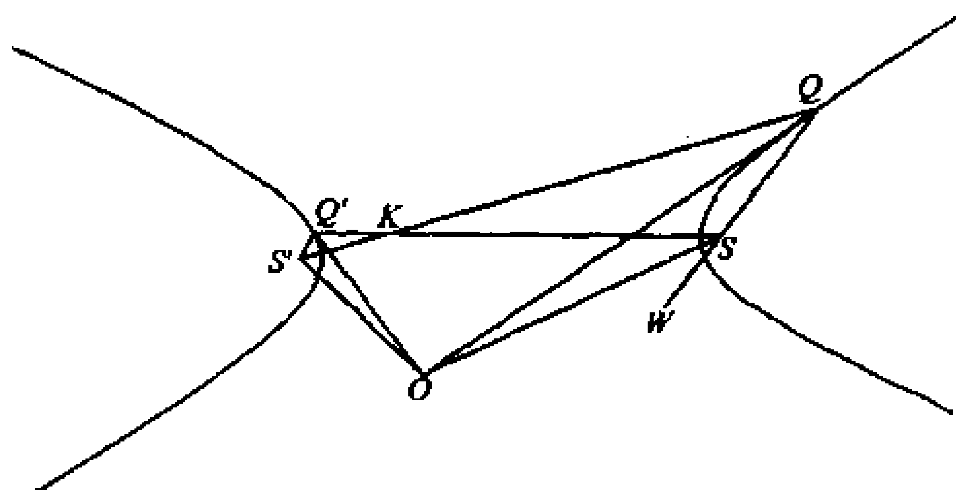


图 4-21a

[证明] 情形 1.[如图 4-21a,]连结 SQ, SQ', $S'Q$, $S'Q'$, 延长 QS 到 W,并设 SQ' 与 $S'Q$ 相交于 K.那么

$$\angle SOQ = \angle OSW - \angle OQS \quad (\text{Euc. I .32.})$$

$$= \frac{1}{2}\angle Q'SW - \frac{1}{2}\angle S'QS \quad (\text{命题 } 20, 12)$$

$$= \frac{1}{2}\angle SKQ. \quad (\text{Euc. I .32.})$$

类似地,

$$\angle S'OQ' = \frac{1}{2}\angle S'KQ'.$$

[100] $$\therefore \quad \angle SOQ = \angle S'OQ'.$$

情形 2.[如图 4-21b,]

$$\angle SOQ = 180° - \angle OSQ - \angle OQS \quad (\text{Euc. I .32.})$$

$$= 180° - \frac{1}{2}\angle QSQ' - \frac{1}{2}\angle SQS' \quad (\text{命题 } 20, 12)$$

$$= 180° - \frac{1}{2}\angle SKS'. \quad (\text{Euc. I .32.})$$

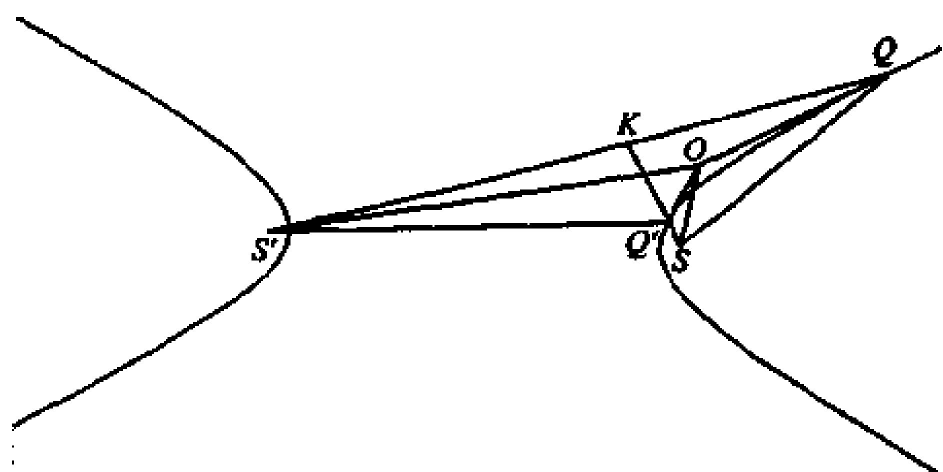


图 4－21b

同时还有

$\angle S'OQ' = 180° - \angle OQ'S' - \angle OS'Q'$（Euc. Ⅰ.32.）

$= \frac{1}{2}\angle SQ'S' - \frac{1}{2}\angle QS'Q'$（命题 12,20）

$= \frac{1}{2}\angle SKS'$.（Euc. Ⅰ.32.）

$\therefore \quad \angle SOQ = 180° - \angle S'OQ'$.

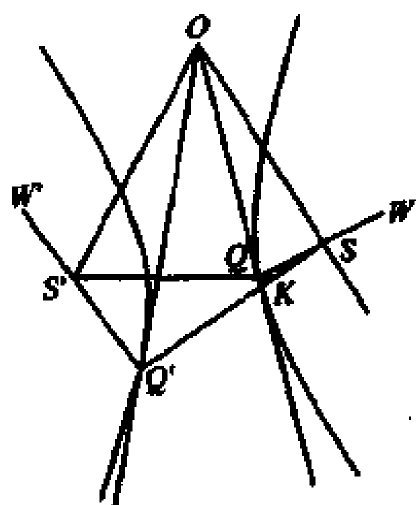


图 4－21c

注：在情形 2 中，O 点位于两条渐近线所成的包含双曲线分支的两角之一的里面；而在情形 1 中，O 点位于两条渐近线所成的不含双曲线分

支的两角之一的里面.

证明过程还与 O 是否在两条准线之间有些关系.对于情形 1,在以上证明文字中,O 点在两条准线中间;而图 4-21c 则不是,因而这幅图中的 K 点跑到了 $S'Q$ 的延长线上.

此外,图 4-20a 中曾画出 O 点的两种位置,由此提供了命题 21 情形
【101】2 中 O 点在另一边的例子.

定义 [设 CA 和 CB 分别是一条双曲线的横轴和共轭轴.那么] 以 CB 为横轴,CA 为共轭轴的双曲线叫做共轭双曲线.

注:共轭双曲线与原双曲线有相同的渐近线,因为这些渐近线是同一个矩形的对角线.(命题 4)

命题 22

过双曲线上任一点 P 作直线平行于 CA 或 CB,与两条渐近线相交于点 p 和 p',则乘积 $Pp \cdot Pp'$ 分别等于 CA 的平方或 CB 的平方.如果 P 在共轭双曲线上,以上结论也成立.

图 4-22a

［证明］ 情形 1.［如图 4 - 22a，］作 Ppp' 平行于 CA，交 CB 于 n.

那么

$$PN^2 : CN^2 - CA^2 = CB^2 : CA^2; \text{(命题 3)}$$

$$\therefore Cn^2 : Pn^2 - CA^2 = CB^2 : CA^2.$$ [102]

此外，［设顶点 A 处的切线交渐近线于 a，］又有

$$Cn^2 : pn^2 = CB^2 : Ba^2 = CB^2 : CA^2,$$

$$\therefore \quad Pn^2 - CA^2 = pn^2,$$

$$\therefore \quad Pn^2 - pn^2 = CA^2,$$

即

$$Pp \cdot Pp' = CA^2.$$

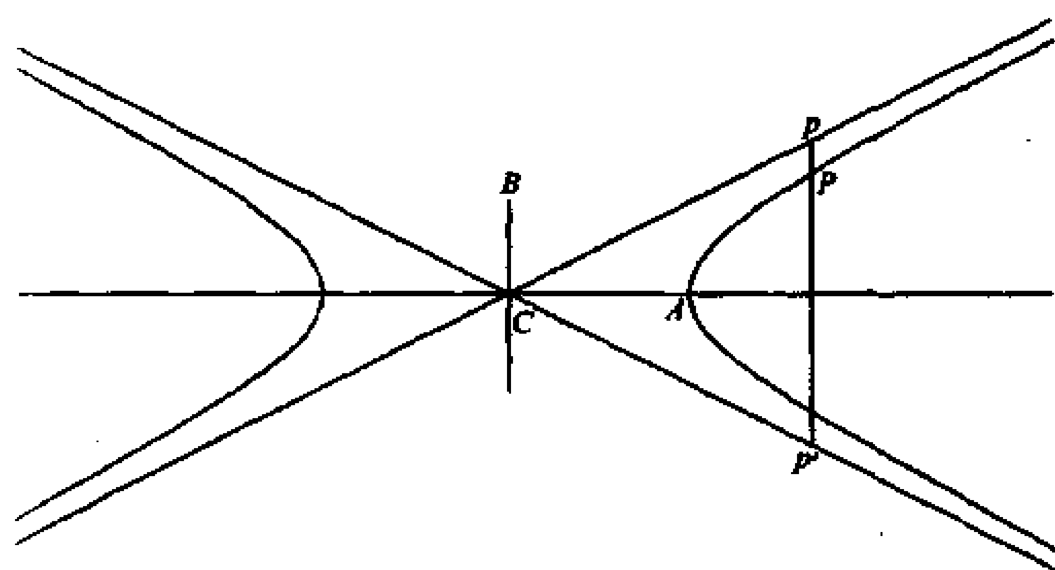


图 4 - 22b

情形 2 ［如图 4 - 22b，］作 Ppp' 平行于 CB，那么

$$Pp \cdot Pp' = CB^2. \text{(命题 4)}$$ [103]

情形 3 和 4 因为对于双曲线的两个轴已经分别证明了

$$Pp \cdot Pp' = CA^2 \text{ 或 } CB^2,$$

所以当 P 点在共轭双曲线上时，命题也正确，见图 4 - 22c 和 4 - 22d.

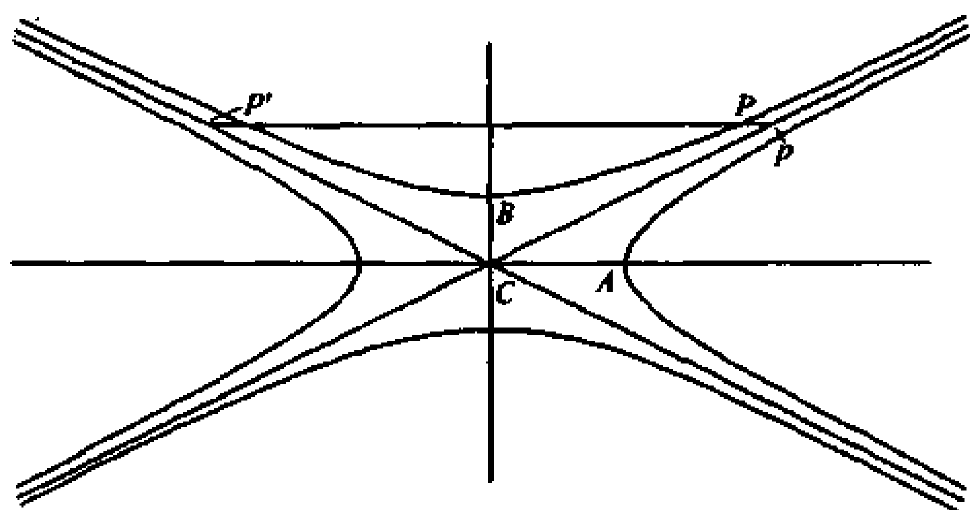
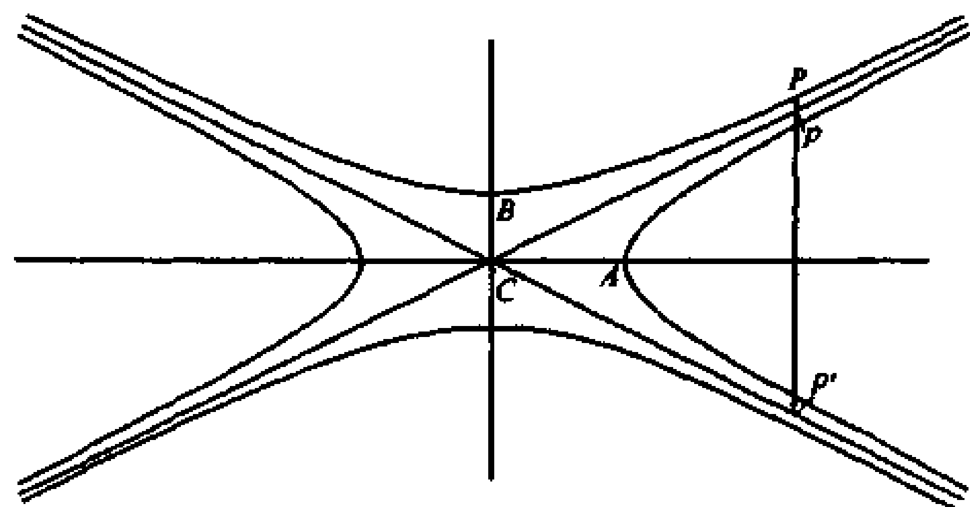


图 4-22c



[104]

图 4-22d

命题 23

如果通过双曲线或其共轭双曲线上两点 P, Q 作两条平行直线，分别交渐近线于 p, p'; q, q', 那么

$$Pp \cdot Pp' = Qq \cdot Qq'.$$

［证明］ 先假设 P 和 Q 在双曲线的同一分支上.

过 P 和 Q 作直线平行于共轭轴 CB, 交渐近线于 u, u'; w, w'.

由相似三角形得

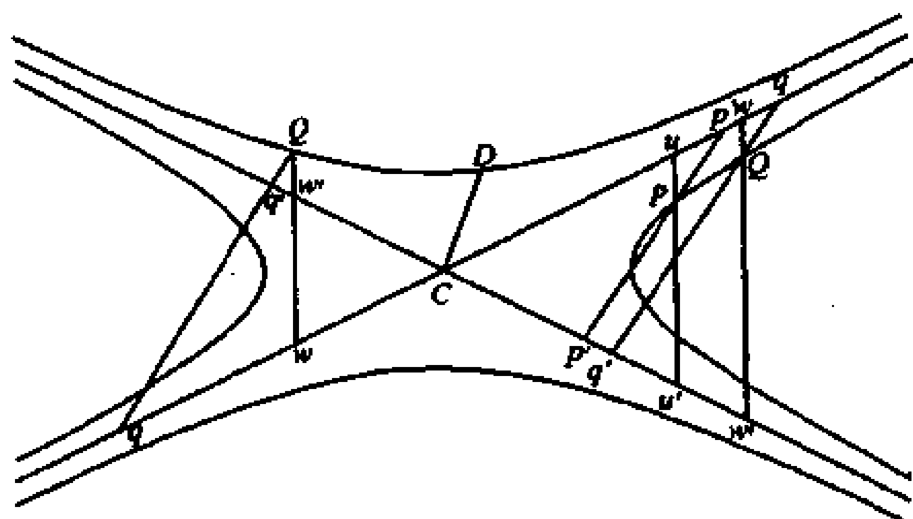


图 4-23

$$Pp : Pu = Qq : Qw,$$
$$Pp' : Pu' = Qq' : Qw'.$$

所以,将以上两式相乘,得

$$Pp \cdot Pp' : Pu \cdot Pu' = Qq \cdot Qq' : Qw \cdot Qw'.$$

但是

$$Pu \cdot Pu' = CB^2 = Qw \cdot Qw',\ (\text{命题 } 22)$$
$$\therefore \quad Pp \cdot Pp' = Qq \cdot Qq'.$$

无论点 Q 是在双曲线上或者它的共轭双曲线上,证法相同;两种情形都已在图中画出.

注:过中心作 CD 平行于 Qq 或 Pp,交此双曲线或其共轭双曲线于 D,那么将这命题应用于点 Q 和 D,得

$$Qq \cdot Qq' = DC \cdot DC = CD^2.$$

问　　题

设双曲线的弦 QQ' 平行于 P 点处的切线;Pp,Qq,$Q'q'$ 平行于一条渐近线,终点[p,q,q']在另一条[渐近线]上.求证:$Cq \cdot Cq' = Cp^2$. 【105】

命题 24

设任一直线交双曲线于 Q,Q',交渐近线于 q,q',则 Qq =

$Q'q'$.

又若切线 rPr' 交渐近线于 r 和 r'，则 $Pr = Pr'$.

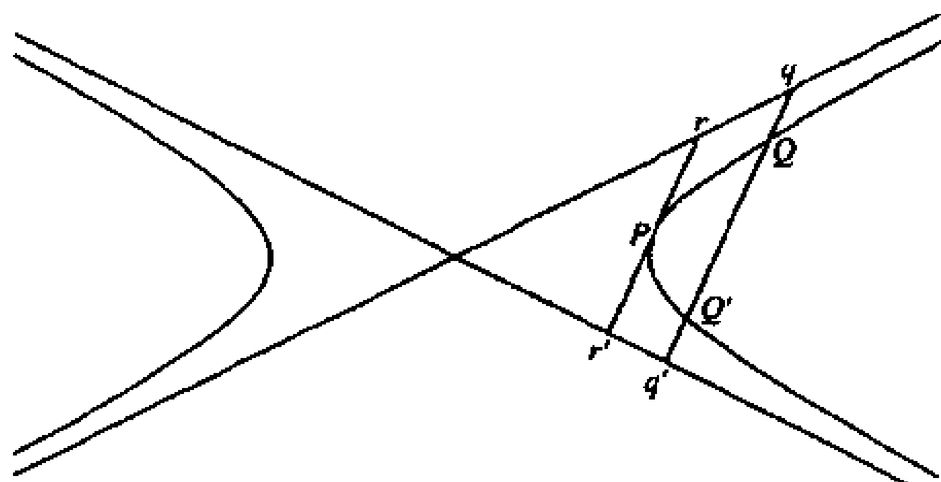


图 4－24

［证明］ $Qq \cdot Qq' = Q'q' \cdot Q'q$，（命题 23）

$$\therefore \quad Qq \cdot QQ' + Qq \cdot Q'q' = Q'q' \cdot QQ' + Q'q' \cdot Qq;$$

$$\therefore \quad Qq \cdot QQ' = Q'q' \cdot QQ';$$

$$\therefore \quad Qq = Q'q'.$$

令 QQ' 平行移动，直到成为 P 点处的切线.

因为总是成立 $Qq = Q'q'$，

$$\therefore \quad Pr = Pr'.$$

注：Q 点和 Q' 点可以分别位于双曲线的不同两支上，这时双曲线不存在平行于 QQ' 的切线.

问　　题

1. 如果 q，q' 在共轭双曲线上，［命题 24］同样成立.

2. ［如图 4－24，］如果点 P 处的法线交两条轴于 G，g，那么 G，g，r，

[106] r' 都在一个通过中心的圆上.

命题 25

双曲线的一组平行弦的中点的轨迹是一条通过中心的直

线.在这直线与双曲线交点处的切线平行于这些弦.

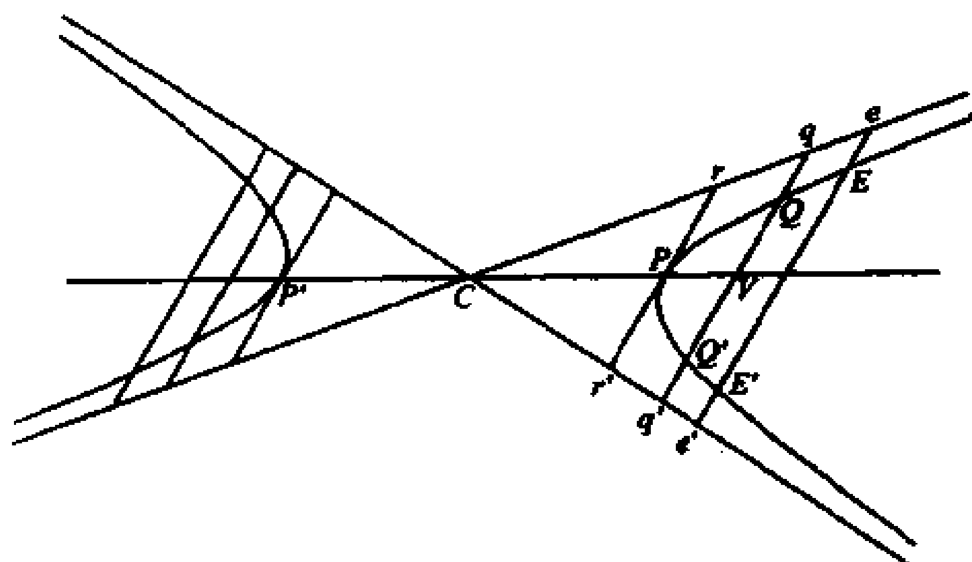


图 4-25

[证明] 设 QQ',EE' 等等是一组平行弦,交渐近线于 q,q', e, e', 等等.

作 CV 平分 QQ' 于 V.

那么 CV 也平分 qq',因为 $Qq = Q'q'$.(命题 24)

所以,由相似三角形知 CV 平分 ee'.

因而它也平分 EE',因为 $Ee = E'e'$.(命题 24)

所以 CV 平分所有平行于 QQ' 的弦.

设 CV 交曲线于 P,并且令 QQ' 向 P 平行移动.

那么,因为 QQ' 总是被 CPV 平分,最后 Q 和 Q' 重合到 P 点,所以 P 点处的切线平行于被 CPV 平分的这组平行弦. 【107】

定义 通过一组平行弦的中点的直线(CP)叫做直径.

[直径与曲线的交点叫做直径的端点.]

定义 从曲线上任一点[Q]作直线(QV),使它平行于这曲线在一条直径(PCP')端点处的切线,那么所作直线叫做这条直径的纵标线.

注意：如果这条直径是横轴，那么纵标线的意义与平常用法相同.

注：有时把一条直径夹在双曲线或其共轭双曲线之间的线段长度叫做直径.

命题 26

如果一条直径平分平行于第二条直径的弦，那么第二条直径平分平行于第一条直径的弦.

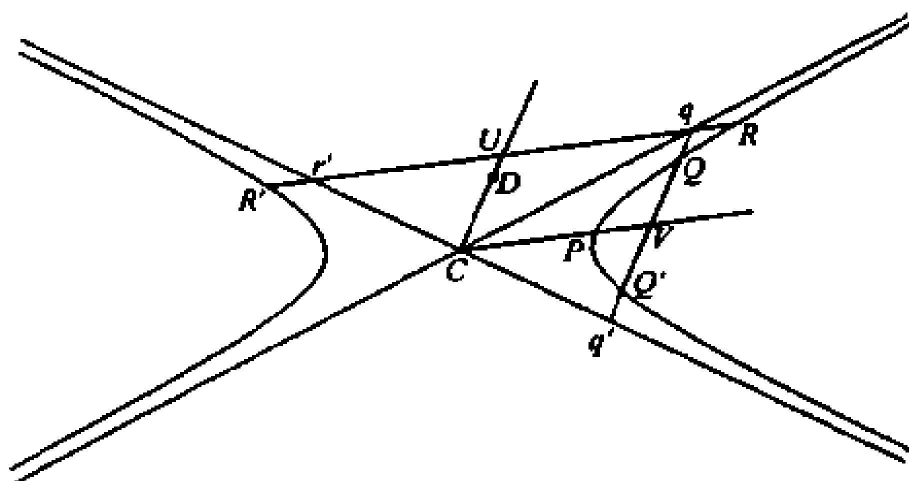


图 4－26a

［证明］ 设 CP 平分 QQ' 于 V，作 CD 平行于 QQ'.

延长 QQ'，交渐近线与 q，q'.

过 q 作 $RqUr'R'$ 平行于 CP，交曲线于 R 和 R'，交渐近线于 q，r'，交 CD 于 U.

那么，因为 $Qq = Q'q'$，所以 qq' 被 V 点平分. 又因为 CV 平行于 qr'，

$$\therefore \quad Cr' = Cq'; \text{(Euc. VI. 2.)}$$

$$\therefore \quad r'U = Uq. \text{(Euc. VI. 2.)}$$

而 Rq 等于 $R'r'$，

$$\therefore \quad R'U = RU, \text{(命题 24)}$$

因而 *CD* 平分所有平行于 *CP* 的弦.(命题 25) 【108】

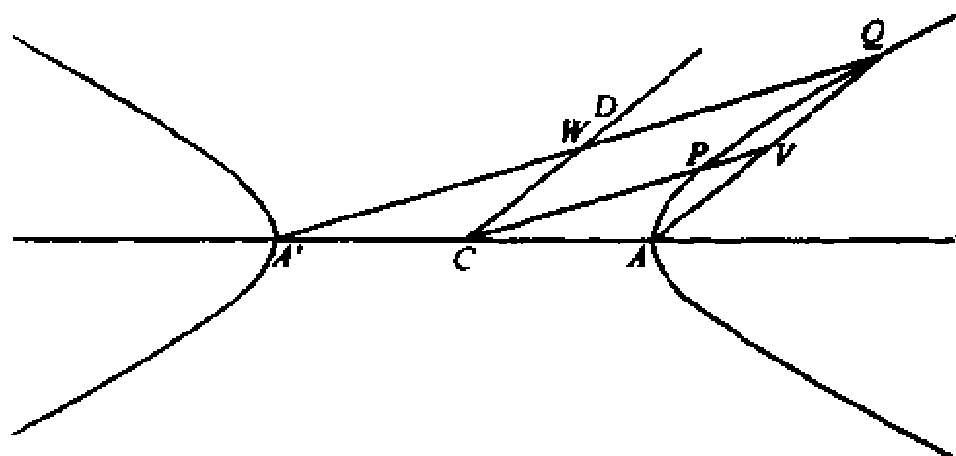


图 4－26b

[证法二] 作 *AQ* 平行于 *CD*,交 *CP* 于 *V*.

连结 *A'Q*,交 *CD* 于 *W*.

因为 *AQ* 被 *V* 点平分,*AA'* 被 *C* 点平分,所以 *A'Q* 平行于 *CP*.

又因为 *CD* 平行于 *AQ*,所以 *A'Q* 被 *W* 平分.

所以 *CD* 平分平行于 *CP* 的弦 *A'Q*.

因而 *CD* 平分所有平行于 *CP* 的弦.

定义 如果两条直径互相关联,使得每一条平分平行于另一条的弦,就称它们为**共轭直径**.

注:两条共轭直径里面,一条与双曲线相交,另一条与共轭双曲线相交. 【109】

定义 连结双曲线上一点(*Q*)和一条直径(*PCP'*)两端的两条弦(*QP*, *QP'*),叫做**互补的弦**.

命题 27

互补弦平行于共轭直径.

[证明] 作直径 *CL*, *CM* 平行于互补弦 *P'Q*, *PQ*,与它们

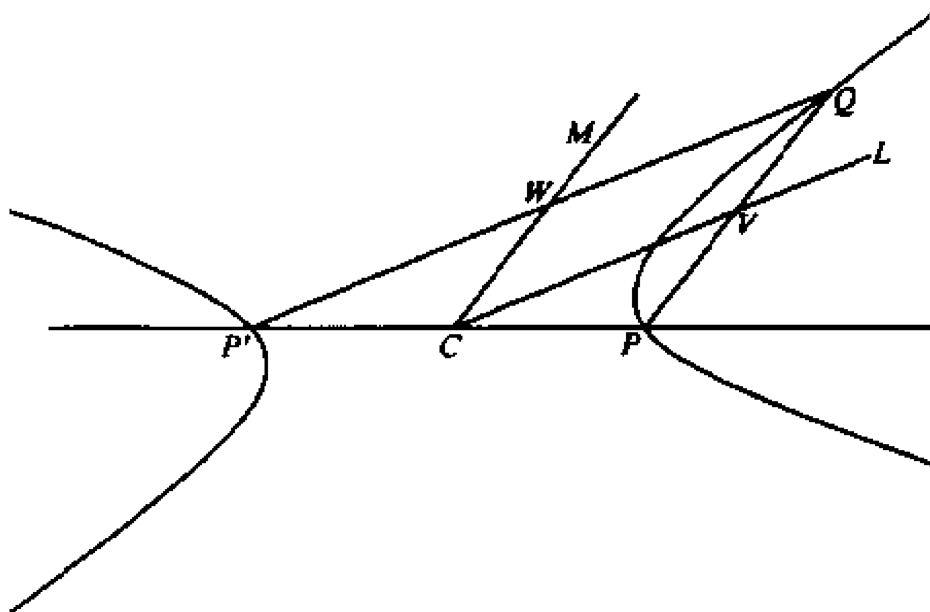


图 4-27

相交于 W 和 V.那么

$$PV:VQ=PC:CP'.\ (\text{Euc.}\ \text{VI}.\ 2.)$$

$$\therefore\quad PV=VQ.$$

$\therefore$ CL 平分 PQ 和所有其他平行于 CM 的弦.(命题 25)

类似地,CM 平分所有平行于 CL 的弦,因而 CL,CM 是共
[110] 轭直径.

命题 28

在双曲线及其共轭双曲线中,曲线在与一对共轭直径 PCP',DCD' 交点处的切线围成一个平行四边形,它的顶点都在渐近线上.

并且,PD 被一条渐近线平分,平行于另一条渐近线.

[证明] 作切线 rPr',交渐近线于 r 和 r'.

连结 CD.

那么,因为 CD 共轭于 CP,

$$\therefore\quad CD /\!/ rr'.$$

因而,根据命题 23,并且注意 DC 与两条渐近线都相交于

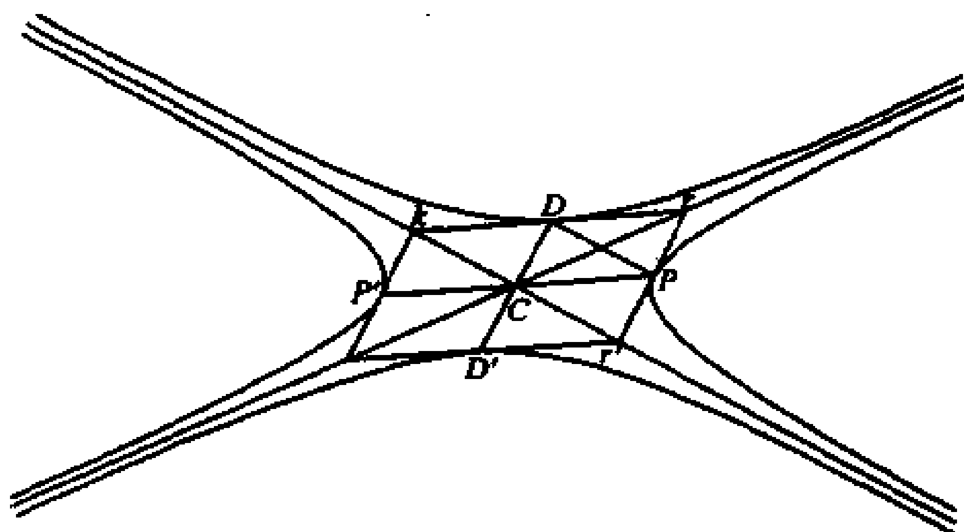


图 4－28

点C，得到

$$DC^2 = Pr \cdot Pr' = Pr^2. \quad (\text{命题 } 24)$$

$$\therefore \quad DC = Pr, \ DC /\!/ Pr,$$

$$\therefore \quad rD /\!/ CP. \ (\text{Euc. I. 33.})$$

$\therefore$ rD 是 D 点处的切线.（命题 25）

类似地，点 D 和 P' 处的切线也相交在渐近线上．因而四条切线围成一个平行四边形，它的顶点都在渐近线上．

连结 PD，并设 rD 交另一条渐近线于 k．那么

$$rP = Pr',$$

$$rD = Dk.$$

$$\therefore \quad PD /\!/ kr'.$$

又因为 $CPrD$ 是平行四边形，[它的对角线互相平分，]

$\therefore$ PD 被渐近线平分．

问　　题

在 R.H.[直角双曲线]中，求证：

1．[共轭直径] $CP = CD$，并且渐近线平分任意一对共轭直径的夹角．

2．CP 和 CD 与轴的夹角互余．

3. 互相垂直的直径相等.

4. 任意两条直径的夹角等于它们的共轭直径的夹角.

5. 一条弦对于直径 PP' 两端的张角相等或互补.

[111] 6. 如果一条 R.H.外接于一个三角形,那么中心的轨迹是九点圆.

命题 29

[如图 4-29,设 P 和 D 是双曲线的一对共轭直径的端点,]通过 P 和 D 作平行于轴的直线,所围成矩形的另外两个顶点必在一条渐近线上.

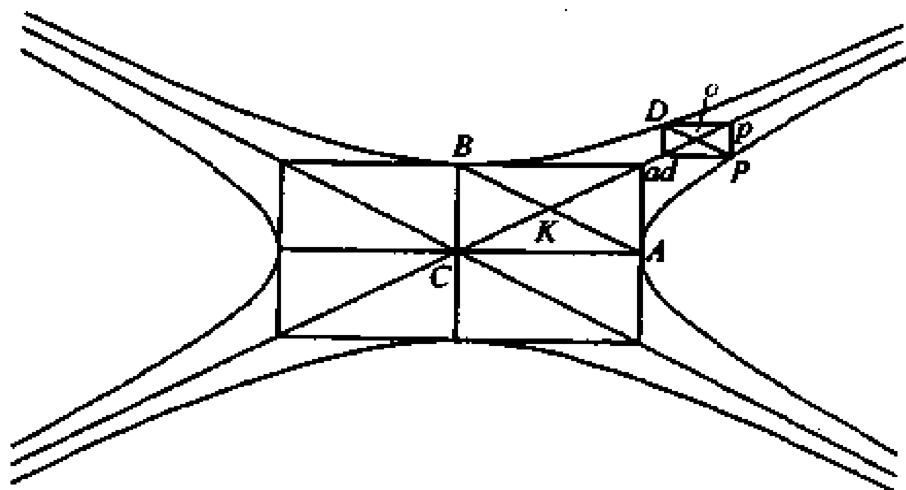


图 4-29

[证明] 作 Pp 平行于[共轭轴] CB,交渐近线于 p;连结 pD.

设 AB,PD 交渐近线于 K 和 o,那么 AB 和 PD 都被渐近线平分,并且它们[都平行于另一条渐近线,因而]互相平行(命题 28).

所以三角形 poP 和 aKA 相似[其中 a 的是过 A、B 所作平行于轴的直线的交点].

$$\therefore \quad Pp : Aa = Po : AK$$

$$= PD : AB, \text{(命题 28)}$$

并且

$$\angle pPD = \angle aAB.$$

因而三角形 pPD 与 aAB 相似.（Euc. Ⅵ. 6.）

所以 pD 平行于 aB，即平行于 CA.

类似地，如果作 Dd 平行于 CB[交渐近线于 d]，那么 Pd 平行于 CA. [112]

命题 30

[如果 CP 和 CD 是双曲线的任意一对共轭直径，那么]

$$|CP^2 - CD^2| = |CA^2 - CB^2|.$$

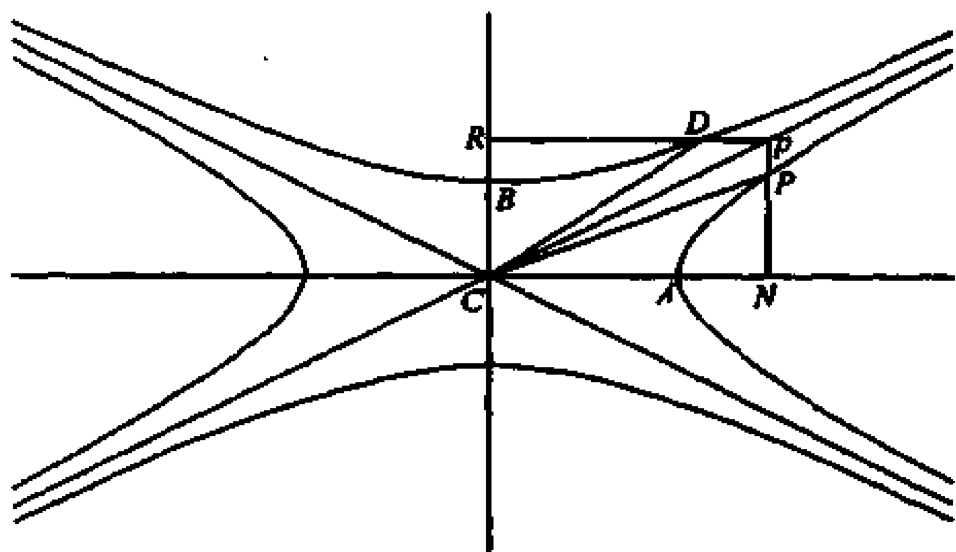


图 4-30

[证明] 作轴的纵标线 PN，DR，并且延长，相交于 p，则 p 点在渐近线上(命题 29). 所以

$$CB^2 = pN^2 - PN^2 \quad (\text{命题 } 24)$$
$$= Cp^2 - CP^2. \quad (\text{Euc. Ⅰ. 47.})$$

此外还有

$$CA^2 = pR^2 - DR^2 \quad (\text{命题 } 24)$$
$$= Cp^2 - CD^2. \quad (\text{Euc. Ⅰ. 47.})$$

[113] $\therefore \quad |CA^2 - CB^2| = |CP^2 - CD^2|$.

命题 31

设双曲线的任意一条切线 rPr' 交渐近线于 r 和 r'，则平行四边形 $CPrD$ 的面积是常数，

(即 $PF \cdot CD = AC \cdot BC$，)

[其中 PF 是点 P 到 CD 的距离，]并且三角形 rCr' 的面积也是常数.

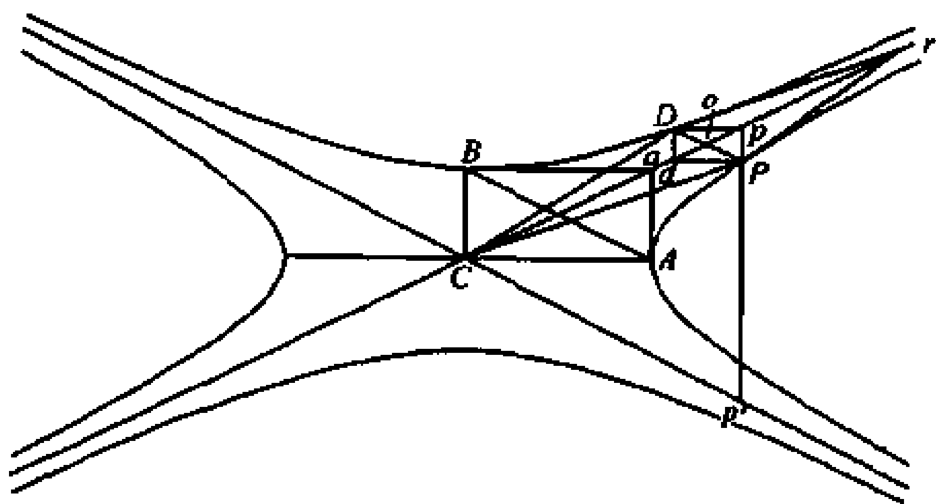


图 4-31a

[证明] 作 Aa，Ba 平行于轴，交渐近线于 a.

过 P 点作双纵标线，交渐近线于 p，p'.

完成平行四边形 $DpPd$. 连结 DP，交渐近线于 o. 连结 AB. [用$\triangle DCP$ 表示三角形 DCP 的面积，其余类推，]那么

$$\triangle DCP : \triangle DpP = Co : op$$

$$= p'P : Pp. \quad \text{(Euc. VI. 2.)}$$

同时还有

$$\triangle BCA : \triangle DpP = BC^2 : Pp^2 \quad \text{(Euc. VI. 19.)}$$

$$= Pp \cdot Pp' : Pp^2 \quad \text{(命题 22)}$$

[114] $$= Pp' : Pp.$$

∴　三角形 *DCP* 的面积等于三角形 *BCA* 的面积.

∴　平行四边形 *CPrD* 的面积等于平行四边形 *CAaB* 的面积,为一常数.

即:

$$PF \cdot CD = AC \cdot BC.$$

([关于垂线 *PF*]参考图 4－16)

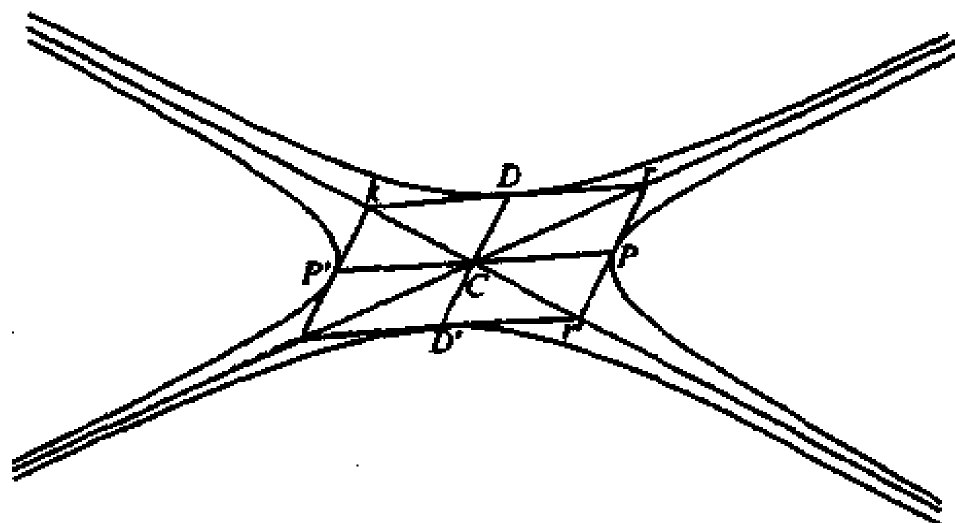


图 4－31b

进而得到,三角形 *rCr'* 的面积等于平行四边形 *CPrD* 的面积,因为它们都等于由点 *P*,*D*,*P'*,*D'* 处的切线围成的平行四边形面积的四分之一.

所以三角形 *rCr'* 的面积也是常数.

问　　题

1. 如果 *Po*,*Po'* 分别平行于一条渐近线而终止在另一条渐近线上,那么 $Po \cdot Po' = \frac{1}{4}CS^2$.

2. 已知两条渐近线和双曲线上一点的位置,求轴和焦点.

3. 双曲线的两条切线分别交渐近线于 *R*,*r*,*T*,*t*.求证:*Rt* 平行于 *rT*.

4. 在一条 R.H.中,设 CZ 垂直于 P 点处的切线,求证: $CZ \cdot CP =$
[115] CA^2.

命题 32

设 QV 是[双曲线的]直径 PCP' 的纵标线, CD 是平行于 QV 的直径,那么

$$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2.$$

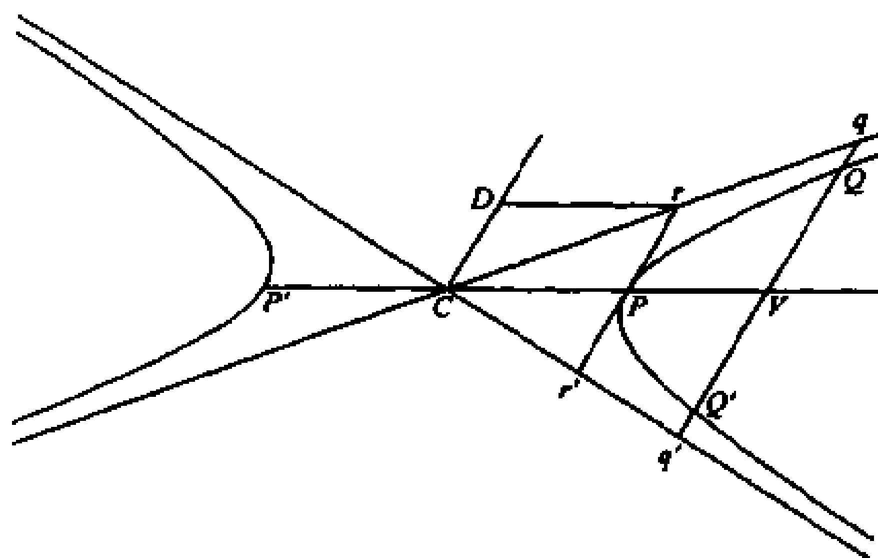


图 4-32

[证明] 设 QV 交渐近线于 q, q'. 作点 P, D 处的切线,交渐近线于[同一]点 r(命题 28). 那么

$$CD^2 = Qq \cdot Qq' \quad (\text{命题 }23)$$
$$= qV^2 - QV^2,$$
$$\therefore \quad QV^2 = qV^2 - CD^2.$$

同时还有

$$PV \cdot PV' = CV^2 - CP^2.$$

但是从相似三角形 CPr 和 CVq 得到

$$CV^2 - CP^2 : CP^2 = qV^2 - Pr^2 : Pr^2$$
$$= qV^2 - CD^2 : CD^2;$$

$$\therefore \quad PV \cdot P'V : CP^2 = QV^2 : CD^2.$$

换句话说，

$$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2.$$

注：在 R.H. 中，$QV^2 = PV \cdot P'V$. [116]

命题 33

[双曲线]任意一条弦两端切线的交点在平分此弦的直径上.

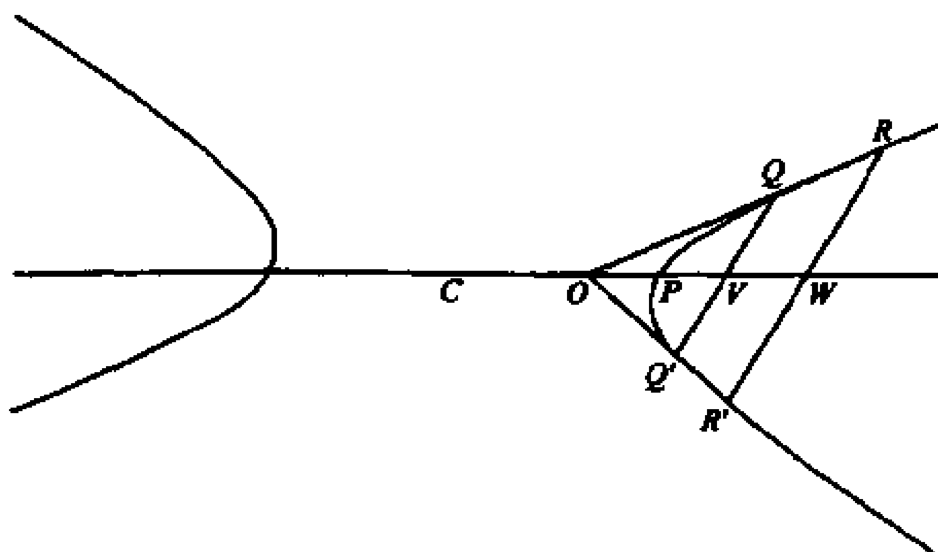


图 4－33

[**证明**] 设 QQ'，RR' 是两条平行弦，连结 RQ，$R'Q'$ 并延长，相交于 O.

平分 QQ' 于 V，并设 OV 延长后交 RR' 于 W.

由相似三角形得

$$\begin{aligned} QV : RW &= OV : OW \\ &= Q'V : R'W. \end{aligned}$$

但是

$$QV = Q'V,$$

$$\therefore \quad RW = R'W.$$

因为 VW 平分平行弦 QQ' 和 RR'，所以它是通过中心 C 的一条直径.（命题 25）

令 R，R' 移动到[分别]与 Q、Q' 重合，则 OQR 和 $OQ'R'$ 成为 Q，Q' 处的一对切线，并且它们依旧相交在直径 CV 上.

注：在一条圆锥曲线中，如果一条直径交准线于 Z，那么 SZ 垂直于被
【117】此直径平分的弦.

命题 34

设 QV 是[双曲线的]直径 CP 的一条纵标线[C 是中心，P 在双曲线上]，若 Q 点的切线交 CP 于 O，则

$$CV \cdot CO = CP^2.$$

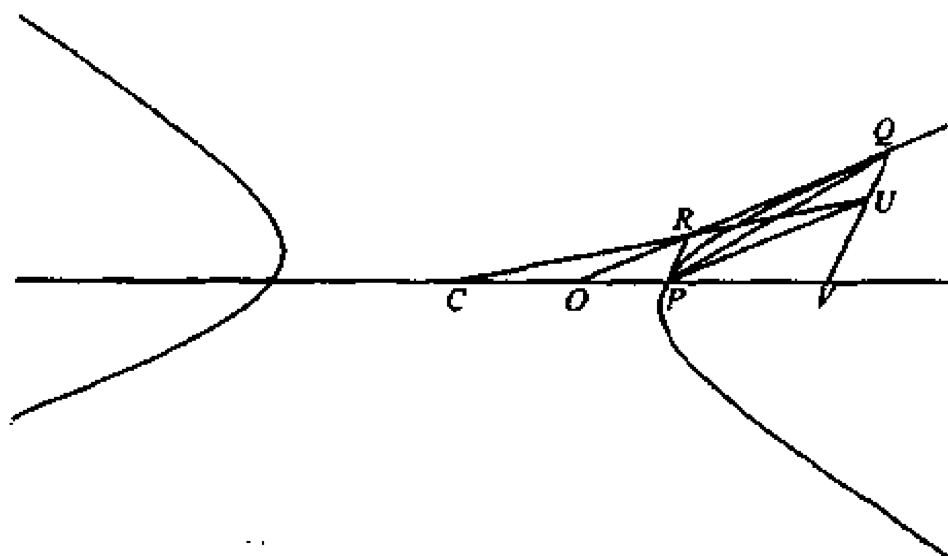


图 4-34

[证明] 作 PU 平行于 OQ，PR 平行于 QV，连结 PQ.

那么 PR 与双曲线相切.（命题 25）

$RPUQ$ 是平行四边形；因而 RU 平分 PQ. 所以 RU 通过中心 C.（命题 33）

现在有

$$CO : CP = CR : CU \quad \text{(Euc. VI. 2.)}$$

$$= CP : CV, \quad (\text{Euc. VI. 2.})$$

所以

$$CP^2 = CO \cdot CV. \qquad [118]$$

命题 35

如果双曲线的两条弦相交，那么它们各自被分成两部分的乘积之比，等于平行半径的平方比.

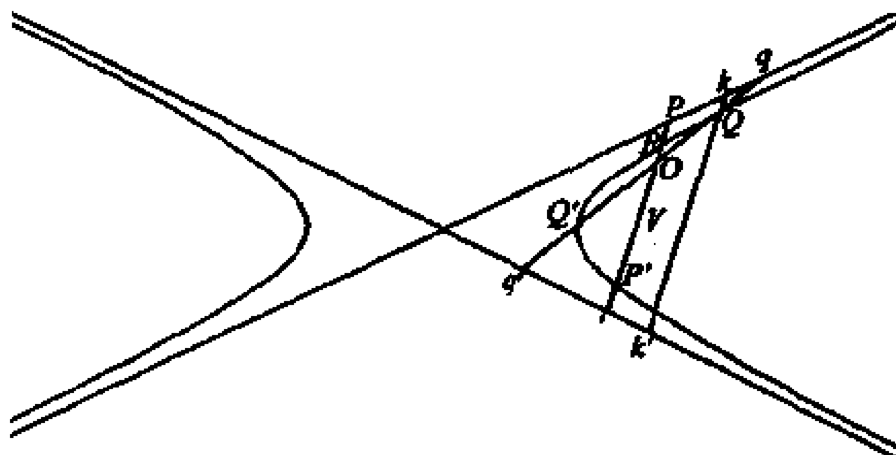


图 4-35

［证明］ 设弦 POP'，QOQ' 交渐近线于 p，p'，q，q'. 平分 PP' 于 V. 作 kQk' 平行于 pp'. 那么

$$pO \cdot Op' = pV^2 - OV^2, \ (\text{Euc. II. 5.})$$

$$PO \cdot OP' = PV^2 - OV^2; \ (\text{Euc. II. 5.})$$

$$\therefore \quad pO \cdot Op' - PO \cdot OP' = pV^2 - PV^2$$

$$= pP \cdot Pp'; \quad (\text{Euc. II. 5.})$$

$$\therefore \quad pO \cdot Op' - pP \cdot Pp' = PO \cdot OP'.$$

类似地，

$$qO \cdot Oq' - qQ \cdot Qq' = QO \cdot OQ'.$$

利用相似三角形得到

$$pO : qO = kQ : qQ,$$

$$Op' : Oq' = Qk' : Qq'.$$

$$\therefore \quad pO \cdot Op' : qO \cdot Oq' = kQ \cdot Qk' : qQ \cdot Qq'$$
$$= pP \cdot Pp' : qQ \cdot Qq';（命题 23）$$

$$\therefore \quad pO \cdot Op' - pP \cdot Pp' : qO \cdot Oq' - qQ \cdot Qq' = pP \cdot Pp' : qQ \cdot Qq',$$

即

$$PO \cdot OP' : QO \cdot OQ' = pP \cdot Pp' : qQ \cdot Qq'$$
$$= 平行半径的平方比.（命题 22）$$

问　　题

1. 如果直角双曲线外接于一个三角形，那么它也通过这三角形的垂心.

2. 作 OR 平行于双曲线的一条渐近线，交曲线于 R，交另一条渐近线于 r，又作 OPP' 平行于一条定直线，交曲线于 P 和 P'，那么乘积 $OP \cdot OP'$ 与 $OR \cdot Cr$ 成比例，对于 O 点的一切位置都成立.

[119]　（还可参考椭圆命题 34 的练习问题.）

第5章 直角双曲线

下列命题是直角双曲线特有的一些性质.

1. $CS^2 = 2CA^2, CS = 2CX, e = \sqrt{2}$.

2. $PN^2 = AN \cdot NA'$.

3. 正焦弦 $= AA'$.

4. $CN = NG$.

5. 以直角双曲线上任一点 P 为圆心、PC 为半径的圆,与法线的交点在轴上,与切线的交点在渐近线上,并且

$$PC = PG = Pg = Pr = Pr'.$$

6. 共轭直径相等,且渐近线平分其夹角.

7. 一对共轭直径与每个轴所成的角互余.

8. 互成直角的直径相等.

9. 两条直径的夹角等于其共轭直径的夹角.

10. 任一弦对于一条直径 PP' 两端的张角相等或互补.

11. 作 P 点处切线的垂线 CZ,则

$$CZ \cdot CP = CA^2.$$

12. 如果直角双曲线外接于一个三角形,那么它也通过三角形的垂心.

13. 如果直角双曲线外接于一个三角形,则其中心的轨迹是九点圆. [120]

第6章　圆柱面和圆锥面的截线

如果让矩形绕其一边旋转，那么对边画出一个曲面，叫做正圆柱面.［简称为圆柱面］

矩形的长，可以看成是无限延伸的.

矩形绕它旋转的定边叫做这个柱面的轴.

定义　正圆柱面是由一直线沿圆周移动并保持与一定直线平行而画出的曲面，这条定直线通过圆心，并且垂直于圆所在的平面.

定义　定直线叫做这个圆柱面的轴.

注：圆柱面被平行于轴的平面去截，得到这个圆柱面的两条母线.

圆柱面被垂直于轴的平面去截，得到一个圆.

定义　当圆柱面被一个平面去截时，通过圆柱面的轴而垂直于此截面的平面叫做轴面.

注：轴面与截面的交线是截线的一个［对称］轴；轴面与圆柱面的交线是两条母线.

定义　圆柱面内的一个球，如果切圆柱面于一个圆，切截面
[121] 于一点，就叫做一个焦球.

命题1

正圆柱面被与轴斜交的平面截得的图形是椭圆.

［证明］　设 APA' 是截线. 把轴面看成纸面，并设它交截面于直线 $A'AX$，交圆柱面于母线 KAF，$K'F'A'$.

作焦球，切圆柱面于圆 KRK'，切截面于 S.

图 6－1a

设平面 $K'RK$，$A'PA$ 相交于直线 XM． [122]

过曲线 APA' 上任一点 P 作平面 $F'PFN$ 垂直于圆柱面的轴，交截面于直线 PN，交轴面于直线 FNF'，交圆柱面于圆 FPF'．

过 P 作母线 PR，切焦球于 R；再作 PM 平行于 NX．

连结 SP．

因为平面 APA'，FPF' 都垂直于轴面，所以 PN 垂直于轴面（Euc．Ⅺ．19．）；因而 PN 同时垂直于 AA' 和 FF'．

从同一点到一个球的切线长相等 （Euc．Ⅲ．36．）；

$$\therefore \quad SP = PR = FK,$$

$$SA = AK, \quad PM = NX.$$

但是

$$FK : NX = AK : AX; \quad (\text{Euc. VI. 2.})$$

$$\therefore \quad SP : PM = SA : AX$$

现在 AK 小于 AX（Euc．Ⅰ．19．），所以 $SA : AX$ 是小于 1 的

【123】定比，因而 APA' 是椭圆，其焦点为 S，准线为 XM.

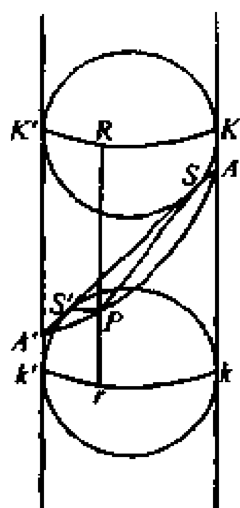


图 6-1b

［证法二］ 设 APA' 是截线. 把轴面看成纸面，并设它交截面于直线 AA'，交圆柱面于母线 KAk，$K'A'k'$.

作两个焦球，切圆柱面于圆 KRK'，krk'，切截面于 S 和 S'.

过曲线 APA' 上任一点 P 作母线 RPr，切焦球于 R，r. 连结 PS，PS'，它们也与焦球相切.

于是 $SP=PR$，因为它们是［从同一点 P］到球的切线；同时又有 $S'P=Pr$，

$$\therefore \quad SP+S'P=PR+Pr=Rr=Kk.$$

所以曲线是一个椭圆，其焦点为 S，S'，长轴等于 Kk.（椭
【124】圆，［课题］8）

［证法三］ 设 APA' 是截线.

把轴面看成纸面，设它交截面于直线 AA'，交圆柱面于母线 AFL，$A'F'L'$.

过截线上任一点 P 作平面 $F'PFN$ 垂直于圆柱面的轴，交截面于直线 PN，交轴面于直线 FNF'，交圆柱面于圆 FPF'.

作 AL'，$A'L$ 平行于 KK'.

图 6-1c

因为平面 KNK'，APA' 都垂直于轴面，所以 PN 垂直于轴面 (Euc. Ⅺ. 19.)。因而 PN 垂直于 FF' 和 AA'。

由相似三角形得

$$AN:NF = AA':A'L,$$

$$A'N:NF' = A'A:AL';$$

$$\therefore\quad AN\cdot A'N:NF\cdot NF' = AA'^2:A'L\cdot AL',$$

$$\therefore\quad AN\cdot NA':PN^2 = AA'^2:AL'^2.\quad \text{(Euc. Ⅲ. 35.)}$$

所以截面是一个椭圆，其长轴为 AA'，短轴等于 AL'。(椭圆，命题 3) 【125】

如果一个直角三角形绕其一条直角边旋转，则斜边画出一个曲面，叫做正圆锥面。

斜边的长度可认为往两个方向无限伸展。

直角三角形绕它旋转的定边叫做锥面的轴。

三角形中，斜边与定边相交处的顶点叫做圆锥面的顶点。

当斜边往两个方向无限伸展时，得到完整的圆锥面，由两叶组成，它们形状相同、大小相等，分布在顶点两侧。

定义　正圆锥面是由一直线沿圆周移动并保持过一定点而画出的曲面，这个定点位于一条通过圆心且垂直于圆所在平面的定直线上。[正圆锥面通常简称为圆锥面]

定义　定直线叫做这个圆锥面的轴.

定义　轴上的定点叫做这个圆锥面的顶点.

注：圆锥面被通过顶点的平面去截，得到的图形或者是一个点，或者是这圆锥面的两条母线.

圆锥面被垂直于轴但不通过顶点的平面去截，得到一个圆.

定义　当圆锥面被一个平面去截时，通过圆锥面的轴而垂直于此截面的平面叫做轴面.

注：轴面与截面的交线是截线的一个[对称]轴；轴面与圆锥面的交线是两条母线.

定义　圆锥面内的一个球，如果切圆锥面于一个圆，切截面于一点，就叫做一个焦球.

命题 2

圆锥面被一个不通过顶点又不垂直于轴的平面去截，所得
[126] **截面满足圆锥曲线的定义($SP = e \cdot PM$).**

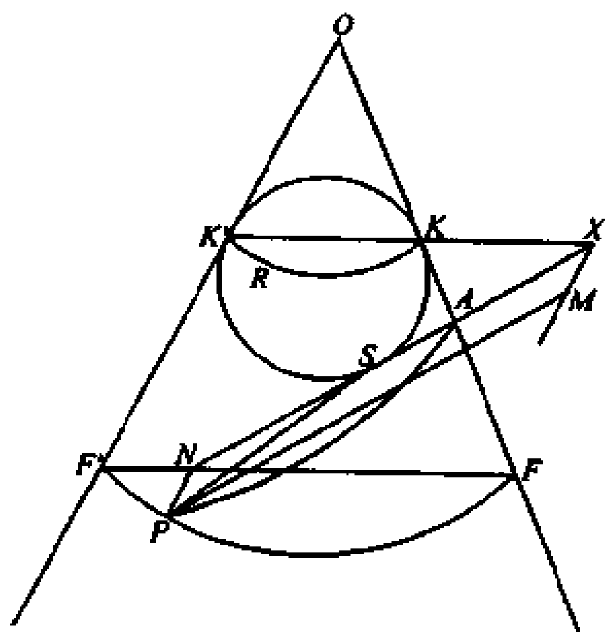


图 6-2

[证明] 设 AP 是截面曲线. 把轴面看成纸面,并设它交截面于直线 NAX,交圆锥面于母线 $OKAF$, $OK'F'$.

作焦球,切圆锥面于圆 KRK',切截面于 S.

设平面 $K'RK$, PA 相交于直线 XM.

过曲线 AP 上任一点 P 作平面 $F'PFN$ 垂直于圆锥面的轴,交截面于直线 PN,交轴面于直线 FNF',交圆锥面于圆 FPF'.

作母线 PRO,切焦球于 R;再作 PM 平行于 NX.

因为平面 AP, FPF' 都垂直于轴面,所以 PN 垂直于轴面 (Euc. Ⅺ. 19.);所以 PN 同时垂直于 AN 和 FF'.

从同一点到一个球的切线相等, (Euc. Ⅲ. 36.)

所以 $SP = PR = FK$, $SA = AK$, $PM = NX$.

但是

$$FK : NX = AK : AX, \quad \text{(Euc. Ⅵ. 2.)}$$

$$\therefore \quad SP : PM = SA : AX.$$

所以 APA' 是圆锥曲线,以 S 为焦点, XM 为准线. [127]

命题 3

圆锥面被平面截得的曲线,当它的焦点轴与轴面内两条母线都相交且交点在圆锥面同一叶中时为椭圆;焦点轴平行于此二母线之一时为抛物线,焦点轴与这两条母线都相交但交点在圆锥面不同叶中时为双曲线.

[证明] 设轴面交截面于 AX,交焦球于圆 $KK'S$,交圆锥面于母线 OKA, OK'. 延长 $K'K$ 和 SA,相交于准线足 X.

情形 1. [如图 6-3a,]延长 AS,交 OK' 于 A',则

$$\angle OK'X > \angle K'XA'. \quad \text{(Euc. Ⅰ. 16.)}$$

但是

$$\angle OK'X = \angle OKK' \quad \text{(Euc. Ⅰ. 5.)}$$

$$= \angle AKX; \quad \text{(Euc. Ⅰ. 15.)}$$

$$\therefore \quad \angle AKX > \angle K'XA' \text{或} \angle KXA,$$

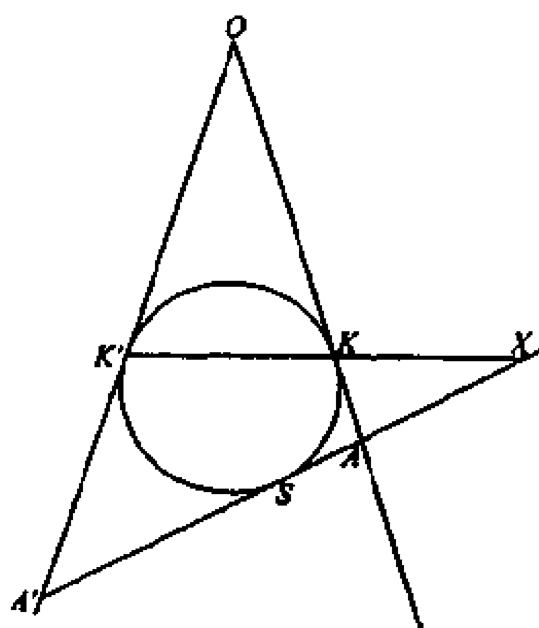


图 6-3a

$\therefore \quad AK < AX$, (Euc. Ⅰ. 19.)

$\therefore \quad SA < AX$, (Euc. Ⅲ. 36.)

【128】因而曲线是椭圆.

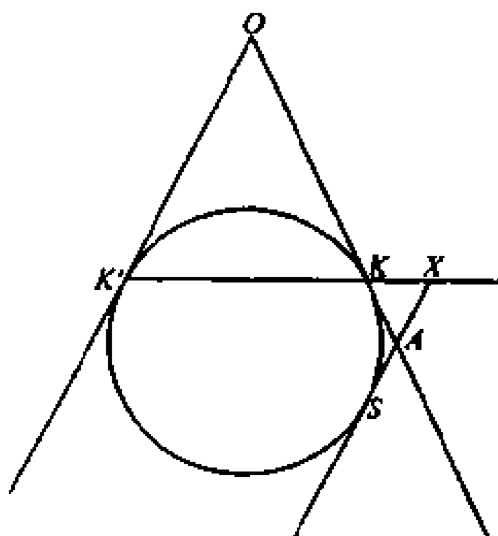


图 6-3b

情形 2. [如图 6-3b,]如果 AS 平行于 OK',那么

$$\angle AKX = \angle OKK'$$

$$= \angle OK'K$$
$$= \angle KXA;\quad (\text{Euc. I. 29.})$$
$$\therefore\quad AK = AX,\quad (\text{Euc. I. 5.})$$
$$\therefore\quad SA = AX,\quad (\text{Euc. III. 36.})$$

因而曲线是抛物线. [129]

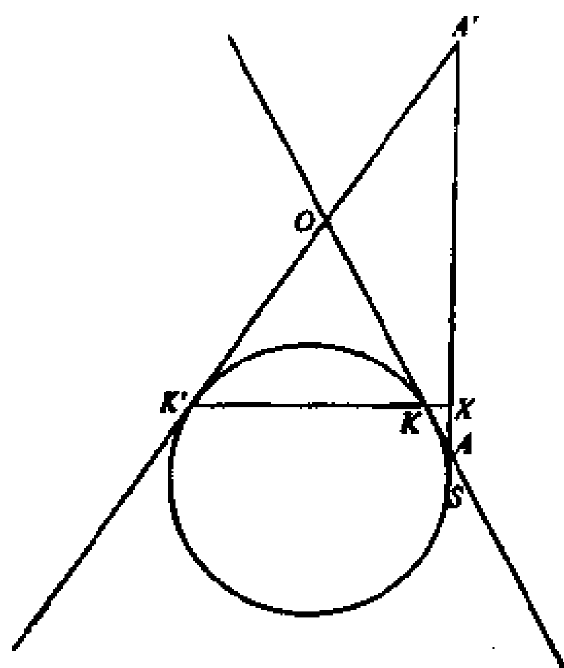


图 6-3c

情形 3. [如图 6-3c,]延长 SA,交 $K'O$ 的延长线于A',则

$$\angle OK'X < \angle K'XA.\quad (\text{Euc. I. 16.})$$

但是

$$\angle OK'X = \angle OKK'\quad (\text{Euc. I. 5.})$$
$$= \angle AKX;\quad (\text{Euc. I. 15.})$$
$$\therefore\quad \angle AKX < \angle K'XA \text{ 或} \angle KXA,$$
$$\therefore\quad AK > AX,\quad (\text{Euc. I. 19.})$$
$$\therefore\quad SA > AX,\quad (\text{Euc. III. 36.})$$

因而曲线是双曲线. [130]

命题 4

在圆锥面的椭圆截面中，长轴等于两个焦球之间沿圆锥面母线测量的距离.

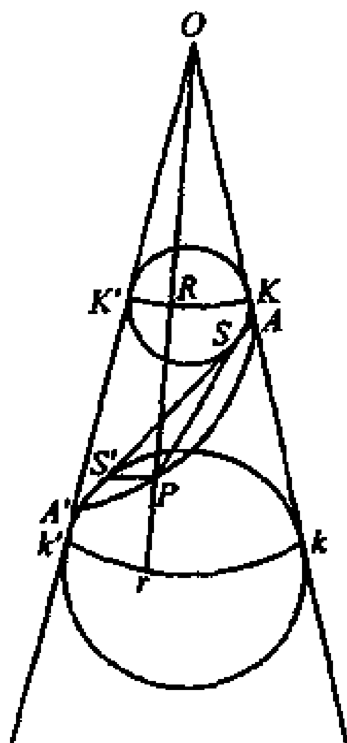


图 6－4

[证明] 设 APA' 是截面曲线. 把轴面看成纸面，并设它交截面于直线 AA'，交圆锥面于母线 KAk，$K'A'k'$.

作两个焦球，切圆锥面于圆 KRK'，krk'，切截面于 S 和 S'.

过曲线 APA' 上任一点 P 作母线 RPr，切焦球于 R，r.

连结 PS，PS'，它们也与焦球相切.

这时将有 $SP = PR$，因为它们都是球的切线；同时还有 $S'P = Pr$.

$$\therefore \quad SP + S'P = PR + Pr = Rr = Kk.$$

所以曲线是一个椭圆，其焦点为 S，S'，长轴等于 Kk.（椭
【131】 圆，[课题]8）

命题 5

在圆锥面的双曲线截面中，横轴等于两个焦球之间沿圆锥面母线测量的距离.

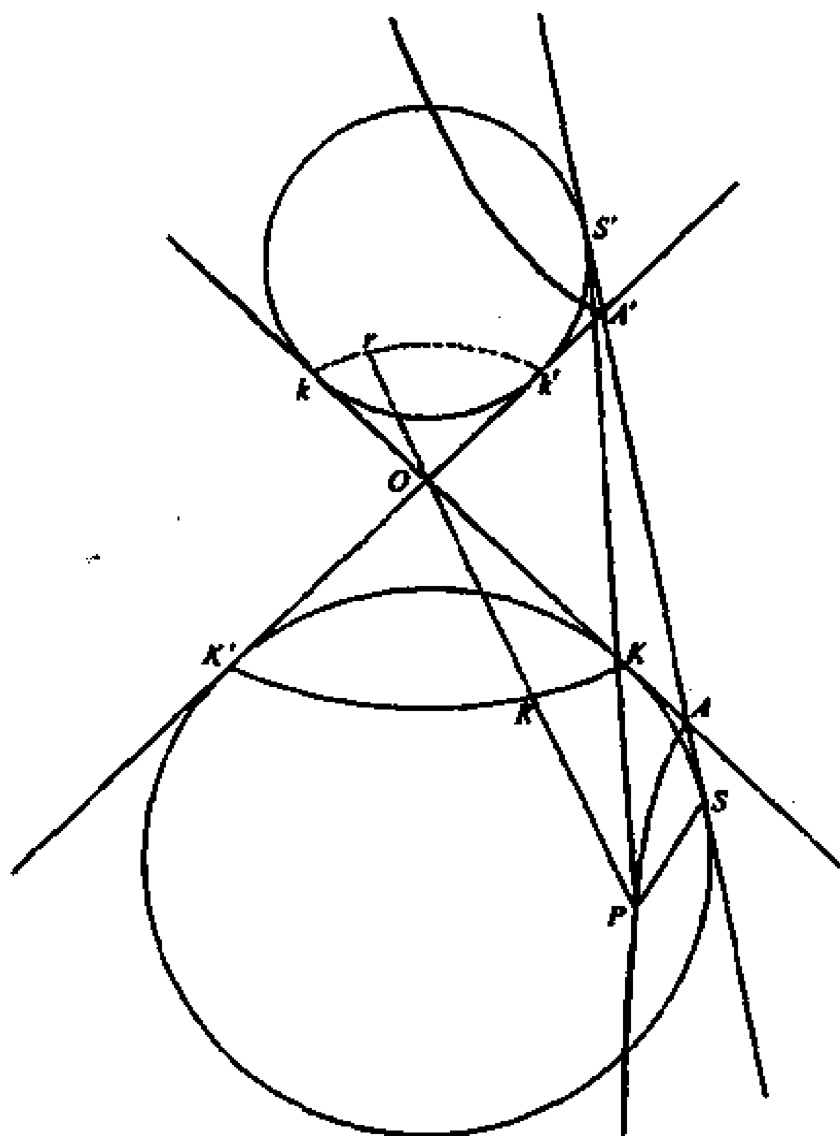


图 6-5 [132]

[证明] 设 APA' 是截面曲线.

把轴面看成纸面，并设它交截面于直线 AA'，交圆锥面于母线 KAk，$K'A'k'$.

作两个焦球，切圆锥面于圆 KRK'，krk'，切截面于 S 和 S'.

过曲线 APA' 上任一点 P 作母线 RPr，切焦球于 R，r.

连结 PS，PS'，它们也与焦球相切.

这时将有 $SP = PR$，因为它们都是球的切线；同时还有 $S'P = Pr$.

$$\therefore \quad |S'P - SP| = |Pr - PR| = Rr = Kk.$$

所以曲线是双曲线，其焦点为 S，S'，横轴等于 Kk.（双曲线，[课题]7）

问题（命题 4 和 5）

【133】 辅助圆在以两焦球中心连线为直径的球面上.

命题 6

在圆锥面的抛物线截面中，正焦弦是抛物线顶点到圆锥面顶点距离与通过抛物线顶点所作圆锥面的圆形截面直径的第三比例项.

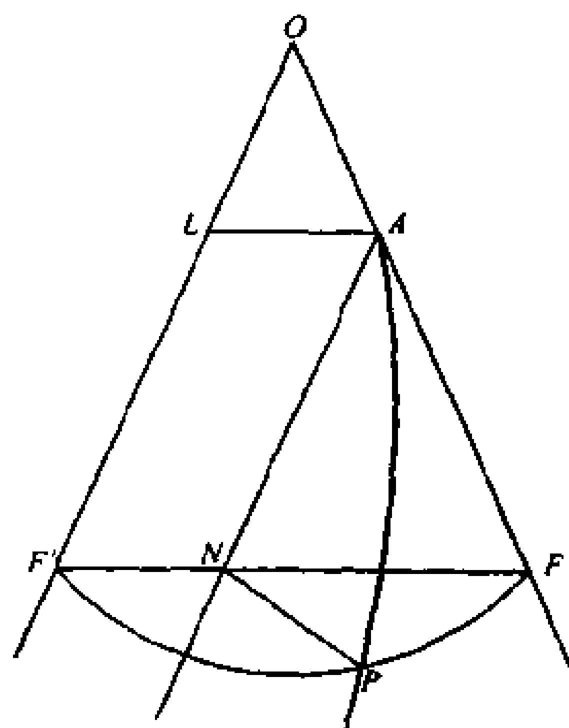


图 6-6

［证明］ 设 AP 是截面曲线.

把轴面看成纸面，设它交截面于直线 AN，交圆锥面于母线 OAF，OLF'. 【134】

过截面曲线上任一点 P 作平面 $F'PFN$ 垂直于圆锥面的轴，交截面于直线 PN，交轴面于直线 FNF'，交圆锥面于圆 FPF'.

作 AL 平行于 FF'.

因为平面 FPF'，APN 都垂直于轴面，所以 PN 垂直于轴面 (Euc. Ⅺ. 19.)；所以 PN 同时垂直于 FF' 和 AN.

取 $4AS$ 为 OL 与 LA 的第三比例项［即 $OL:LA=LA:4AS$］.

由相似三角形得

$$\begin{aligned} AN:NF &= OL:LA \\ &= LA:4AS; \\ \therefore\quad 4AS\cdot AN &= NF\cdot LA \\ &= NF\cdot NF' \\ &= PN^2. \end{aligned}$$

所以曲线 AP 是抛物线，它的正焦弦是 $4AS$（抛物线，［命题］3），并且这里的 $4AS$ 是 OL，LA 的第三比例项. 【135】

命题 7

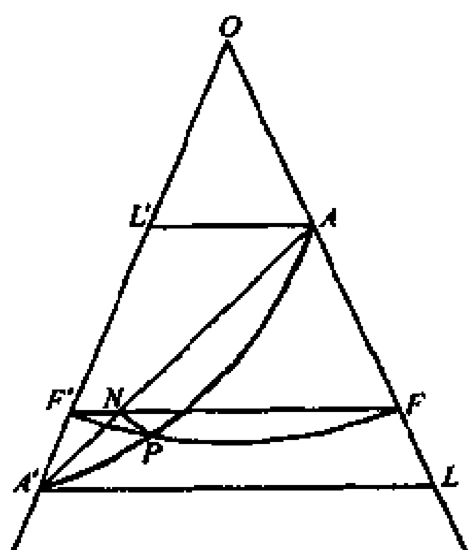
在圆锥面的椭圆截面中，短轴是通过长轴两端所作圆锥面的圆形截面直径的比例中项.

［证明］ 设 APA' 是截面曲线.

把轴面看成纸面，设它交截面于直线 AA'，交圆锥面于母线 $OAFL$，$OA'F'L'$.

过截面曲线上任一点 P 作平面 $F'PFN$ 垂直于圆锥面的轴，交截面于直线 PN，交轴面于直线 FNF'，交圆锥面于圆 FPF'.

作 AL'，$A'L$ 平行于 FF'.



[136] 图 6－7

因为平面 FPF'，APA'都垂直于轴面，所以 PN 垂直于轴面(Euc. Ⅺ. 19.)；所以 PN 同时垂直于FF'和AA'.

由相似三角形得

$$AN:NF=AA':A'L,$$

$$A'N:NF'=AA':AL',$$

$$\therefore\quad AN\cdot A'N:NF\cdot NF'=AA'^2:A'L\cdot AL',$$

$$\therefore\quad AN\cdot NA':PN^2=AA'^2:A'L\cdot AL'.\quad (\text{Euc. III. 35.})$$

所以截线是椭圆，它以 AA' 为长轴，并且短轴是 AL' 与 $A'L$
[137] 的比例中项.(椭圆，[命题]3)

命题 8

在圆锥面的双曲线截面中，共轭轴是通过双曲线顶点所作圆锥面的圆形截面直径的比例中项.

[证明] 设 AP 是截面曲线的一支，A'是另一支的顶点.

把轴面看成纸面，设它交截面于直线 AA'，交圆锥面于母线 $LOAF$，$A'OL'F'$.

过截面曲线上任一点 P 作平面 $F'PFN$ 垂直于圆锥面的轴，交截面于直线 PN，交轴面于直线 FNF'，交圆锥面于圆

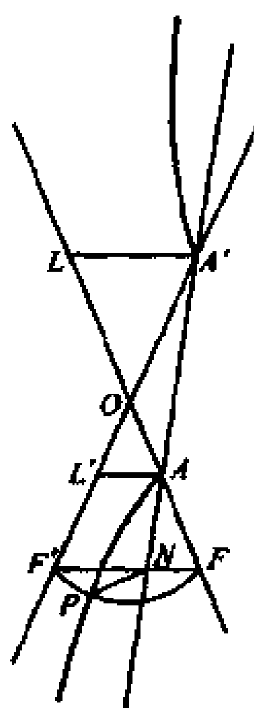


图 6-8

FPF'.

作 AL', $A'L$ 平行于 FF'. 【138】

因为平面 FNF', APA' 都垂直于轴面，所以 PN 垂直于轴面(Euc. Ⅺ. 19.)；所以 PN 同时垂直于 FF' 和 AA'.

由相似三角形得

$$AN:NF = AA':A'L,$$

$$A'N:NF' = AA':AL',$$

$$\therefore \quad AN\cdot A'N:NF\cdot NF' = AA'^2:A'L\cdot AL',$$

$$\therefore \quad AN\cdot A'N:PN^2 = AA'^2:A'L\cdot AL'. \quad (\text{Euc. Ⅲ. 35.})$$

所以截面曲线是双曲线，它以 AA' 为横轴，并且共轭轴是 AL' 与 $A'L$ 的比例中项.（双曲线，[命题]3） 【139】

命题 9

圆锥面的双曲线截面的渐近线平行于过圆锥面顶点且平行于截面的平面里的两条母线.

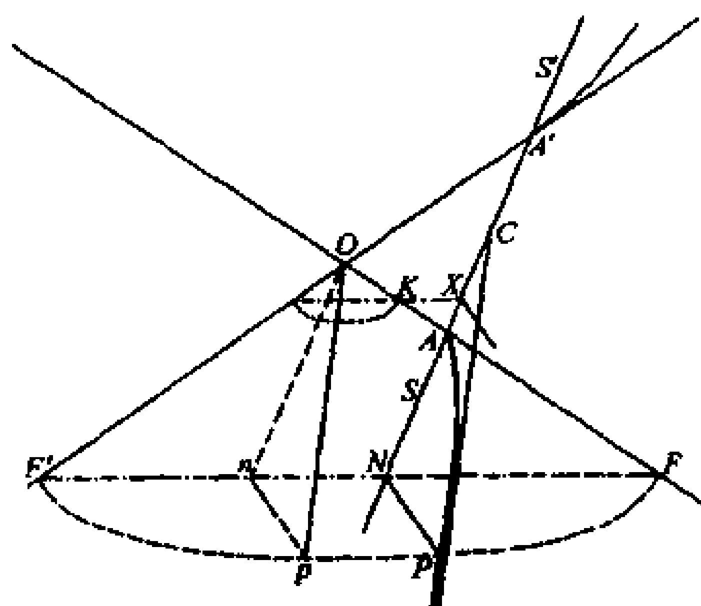


图 6-9

[证明] 把轴面看成纸面.

设 P 是双曲线上任一点, PN 是一条纵标线, S, S' 是焦点, A, A' 是顶点, C 是中心, X 是与焦点 S 相对应的准线上的垂足
[140] [轴与准线的交点].

设 OF, OF' 是轴面内的母线, $FPF'N$ 是一个垂直于轴的平面.

设焦球切 OF 于 K, 则 KX 平行于 FF' (命题 2), 且 SA 等于 AK. (Euc. Ⅲ. 36.)

设平面 Opn 平行于截面, 交圆锥面于母线 Op, 交轴面于 On, 交平面 FPF' 于 pn.

三角形 OnF, AXK 相似, 因为 On 平行于 AX, 且 nF 平行于 XK.

$$\therefore \quad On : OF = AX : AK$$
$$= AX : AS,$$
$$\therefore \quad OF = e \cdot On.$$

但是母线 OF, Op 相等,

$$\therefore \quad Op = e \cdot On.$$

在双曲线命题 4 的图 4－4 中，

$$CR^2 = CA^2 + AR^2$$
$$= CA^2 + CB^2$$
$$= CS^2;$$
$$\therefore \quad CR = CS = e \cdot CA;$$

所以 pOn 是渐近线夹角的一半(双曲线，[命题]4)． 但是 On 平行于横轴，所以 Op 平行于一条渐近线． [141]

命题 10

过任一点作两条直线，使它们平行于两条定直线，与一已知圆锥面相交，那么对于这一点的一切位置，所作两线与圆锥面两交点到这点距离乘积之比是常数．

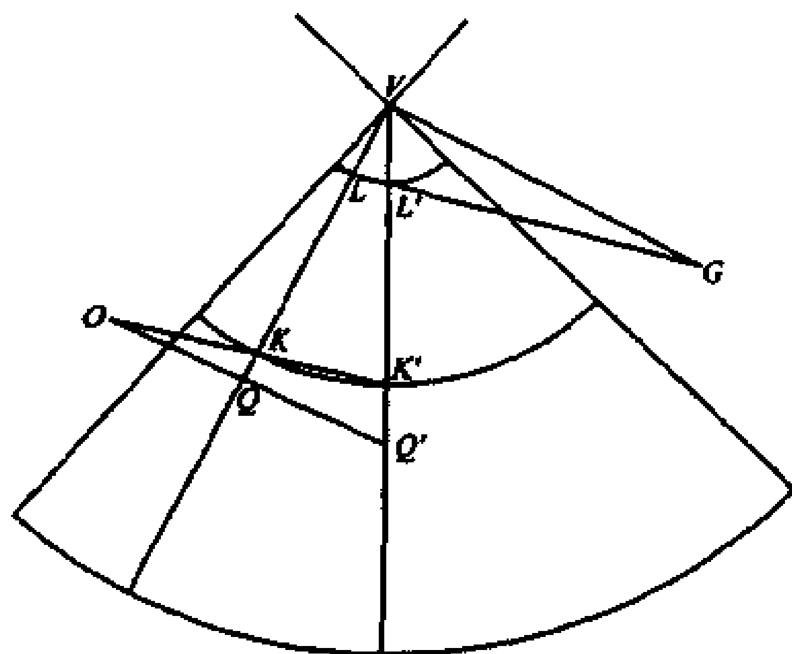


图 6－10

图中未画出 ORR' 和 VH．

[证明] 设 OQQ'，ORR' 是通过 O 点所作的两条直线，平行于两条定直线，交圆锥面于 Q，Q'，R，R'．

过顶点 V 作 VG、VH 平行于定直线，与一个垂直于圆锥面
【142】的轴的定平面相交于 G 和 H.

先只考虑乘积 $OQ\cdot OQ'$.

设通过 G 和 H 的这个定平面交平面 VQQ' 于直线 $GL'L$，交圆锥面于圆 LL'.

又设通过 O 点且与定平面 GH 平行的平面交平面 VQQ' 于 OKK'，交圆锥面于圆 KK'.

三角形 OKQ 和 GLV 在同一平面内，并且它们的对应边平行，

$$\therefore\quad OQ:OK=GV:GL.$$

类似地

$$OQ':OK'=GV:GL'.$$

$$\therefore\quad OQ\cdot OQ':OK\cdot OK'=GV^2:GL\cdot GL'.$$

现在对于 O 点的所有位置，GV 是常数，并且乘积 $GL\cdot GL'$ 是常数．（Euc. Ⅲ. 36.）

$$\therefore\quad OQ\cdot OQ'=\lambda\cdot OK\cdot OK'.$$

类似地

$$OR\cdot OR'=\mu\cdot OM\cdot OM',$$

其中 λ 和 μ 是常数，M，M' 是 VR，VR' 与圆 KK' 的交点.

$$\therefore\quad OK\cdot OK'=OM\cdot OM',\quad \text{(Euc. Ⅲ. 36.)}$$

【143】

$$\therefore\quad OQ\cdot OQ':OR\cdot OR'=\lambda:\mu.$$

第7章 补充命题

[本章列出一些]留给读者证明的重要命题.

抛物线

1. 设 POp 是抛物线的弦,交轴于 O,并设 PN, pn 是纵标线,求证:$AN \cdot An = AO^2$.(见命题 3)

2. 抛物线的三条切线所成三角形的外接圆通过焦点.(见命题 13)

3. 设 OQ, OQ' 是[抛物线的]切线,OV 是直径,求证:角 QOV 等于 $Q'OS$.(见命题 7,13)

4. 设 P 是[抛物线中]平分弦 QQ' 的直径的端点,R 是另一条直径的端点,后面这条直径交 QQ' 于 M.求证:

$$QM \cdot MQ' = 4SP \cdot RM.$$

(见命题 16)

5. 设通过抛物线上任一点 R 的直径交弦 QQ' 于 M,交切线 QT 于 T,求证:

$$TR : RM = QM : MQ'.$$

(见命题 16, 17 和 19 的证明)

6. 设 OP 切抛物线于 P, OQR 则与它相交于 Q, R,又设通过 P 点的直径交弦 QR 于 U,求证:

$$OU^2 = OQ \cdot OR.$$

(见命题 19)

7. 设圆与抛物线相交于四点 A,B,C,D,则公共弦 AB, CD 与抛物线的轴的夹角相等.(见命题 19)

8. 设圆与抛物线相交于四点,则此四点的纵标线之和为
【144】零.(见命题 15,19)

9. 如果[抛物线]在三点 P,Q,R 处的法线交于一点,则 P,Q,R 的纵标线之和为零,且三角形 PQR 的外接圆通过[抛物线的]顶点.(利用解析几何)

10. 设 OQ,OQ' 是抛物线的两条切线,则弦 QQ' 从抛物线割下的弓形面积等于三角形 OQQ' 面积的三分之二.(见命题 16)

圆锥曲线

1. 一直线与圆锥曲线的交点不能多于两个.(命题 2)

2. 如果一个圆与一条圆锥曲线相交于四点,那么这些点中任意两点连成的弦与轴的夹角等于另两点连成的弦与轴的夹角.(椭圆 34)

3. 已知一条圆锥曲线的焦点、准线和离心率,以及一条平行于轴的直线.确定此直线与圆锥曲线的交点.

(**提示** 设此直线交准线于 M.[从焦点 S 作准线的垂线,设垂足为 X.]以 X 为圆心、$e\cdot SX$ 为半径作圆.连结 SM,交圆于 p,p'.作 SP,SP' 平行于 Xp,Xp',则 P 和 P' 是所求的点.)

4. 半正焦弦[SL]是任一焦点弦[PSP']在焦点 S 两侧线段的调和中项:

$$\frac{1}{SP}+\frac{1}{SP'}=\frac{2}{SL}.$$

[**提示**]

$$\begin{aligned} SP:SP' &= SN:SN' \\ &= NX-SX:SX-N'X \\ &= SP-SL:SL-SP'. \end{aligned}$$

5. 焦点弦的[位于焦点两侧的]两条线段的乘积,与弦长

成比例.

6. 任意两条相交弦[各自被焦点分成的]两条线段的乘积与平行于它们的焦点弦长成比例.(椭圆 34)

7. 椭圆或双曲线的两条垂直切线的交点在一个定圆上,这个圆叫做准圆.(椭圆 14) [145]

8. 求证:

$$PG : CD = CB : CA, \quad Pg : CD = CA : CB.$$

(椭圆 18 和 33)

9. 求证:

$$SP \cdot S'P = CD^2 = PG \cdot Pg.$$

(椭圆 13 和 18)

10. 如果 QQ' 是一条平行于半径 CD 的焦点弦,那么

$$QQ' \cdot CA = 2CD^2.$$

11. 如果圆锥曲线的一条直径交准线于 Z,那么 ZS 垂直于被此直径平分的弦.(椭圆 11 和 25)

12. 如果 OQ,OQ' 是圆锥曲线的切线,QQ' 交准线于 K,那么 OSK 是直角三角形.(椭圆 22)

13. 如果 P 点处的切线交一对共轭直径于 T 和 t,那么

$$PT \cdot Pt = CD^2.$$ (椭圆 28)

14. 法线 PG 在焦半径 SP 上的射影等于半正焦弦.(椭圆 12)

15. 设 OQ,OQ' 是椭圆的一对切线;从 O 点作一直线,交曲线于 K,M,交 QQ' 于 L.那么 O,K,L,M 调和分割,即

$$\frac{2}{OL} = \frac{1}{OK} + \frac{1}{OM}.$$ (射影)

16. 设 CP、CP' 是一条圆锥曲线的互相垂直的半径,求证:$\frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CP'^2}$ 是常数.(准圆和椭圆 33)

17. 设一直线通过第二条直线的极点,求证:第二条直线也

【146】通过第一条的极点.(射影)

圆柱面和圆锥面的截线

1. 在[圆柱面或圆锥面的]平面截线的任一点,切线与焦半径的夹角等于它与母线的夹角.

2. 截线[椭圆]的短半轴是两个焦球半径的比例中项.

3. 对于圆锥面的所有截线,正焦弦与从圆锥面顶点到截面的垂线长成比例.

4. 一个任意离心率的椭圆总能从正圆柱截得,并能利用正射影变成圆.

【147】 (见附录)

第8章 问　　题

抛物线

1. 设 QSq 是抛物线的一条焦点弦，平行于 P 点处的切线，PG 是法线. 求证：$QS \cdot Sq = PG^2$.

2. 设两条抛物线有公共焦点，并且它们的轴在相同方向上. 作一条通过焦点的直线，与它们相交于四点. 求证：这四点处的切线围成一个矩形，并且这矩形有一条对角线通过焦点.

3. 已知抛物线的准线和曲线上两点，求焦点. 再作一条切线，使它平行于两个已知点的连线.

4. 设 PNQ 是抛物线的一条双纵标线，APQ 是等边三角形. 求证：AN 等于正焦弦长的3倍.

5. 在抛物线中，两条切线夹角的外角[邻补角]是切点间的弦对于焦点的张角的一半.

6. 设 OQ，OQ' 是抛物线的切线，弦 QQ' 交轴于 R，并设 OM 是到轴的垂线. 求证：$AM = AR$.

7. 对于一条抛物线在其任意点的法线 PG，在上面取分点 Q，使得 $PQ:QG$ 是定比. 求证：Q 的轨迹是一条抛物线.

8. 已知两条抛物线有公共的准线. 求证：它们的两条公共切线互成直角.

9. 已知一条抛物线的准线和两条切线；求此抛物线的焦点，并求已知切线上的切点.

10. 设抛物线的一条弦长等于从平分此弦的直径端点到此弦中点距离的4倍. 求证：这条弦通过焦点. 【148】

11. 设 OP、OP' 是抛物线的切线，交[顶点] A 处的切线于 Y 和 Y'，并设 PP' 交轴于 K. 求证：KY，KY' 平行于切线 OP，OP'.（本命题对于任一直径和它端点处的切线都正确，不限于轴.）

12. 设 PY 是抛物线在点 P 处的切线，交顶点处的切线于 Y. 以 PY 为直径的圆交轴于 K 和 K'. 求证：PK，PK' 的延长线是曲线的法线.

13. 设抛物线的两条弦 AB，CD 延长后相交于 O，在 AB，CD 上取点 E，F，使得 $OE^2=OA\cdot OB$，$OF^2=OC\cdot OD$. 求证：EF 平行于轴.

14. 若一抛物线与三角形的三边都相切，则其准线通过垂心.

15. 如果两条抛物线都通过圆上四个已知点，那么它们的轴的交点是这四点的重心①.

16. 设 QOQ'，ROR' 是抛物线的两条弦，并设 ROR' 向两侧延长，交 Q，Q' 处的切线于 r 和 r'. 如果 $Rr=R'r'$，求证：$OR=OR'$.

椭圆

17. 设 POQ 是一个锐角，它的边是椭圆在一条焦点弦 PQ 两端的切线. 求两个焦点.

18. 设一条圆锥曲线的外切四边形的对角线相交于一个焦点，那么这两条对角线互相垂直.

19. 说明怎样在椭圆中作一对共轭直径，使它们的夹角等于已知角.

20. 设 P 和 Q 是椭圆和辅助圆上的对应点，S 是一个焦点. 求证：SP 等于从 S 向圆在 Q 点的切线所作垂线的长.

21. 设椭圆在 P 点的法线交短轴于 g；Pn 是对于轴的纵标线. 求证：

[149] $$Cg:Cn=CS^2:CB^2.$$

22. 设 S 是一条已知圆锥曲线的焦点，从轴上一定点作直线垂直于曲线上任一点 P 处的切线. 求证：此垂线与 SP 的交点在一个定圆上.

23. (1) 从抛物线的轴上一个已知点作法线；

(2) 从椭圆的长轴上一个已知点作法线.

24. 设两个椭圆有一个公共焦点 S，从它们的一条公切线上任一点 P

---

① 译者注：一个点集的重心(centroid)的坐标等于集合中所有点的坐标的算术平均值.

[分别]作这两个椭圆的[第二条]切线，交另一条公切线于 Q，R. 求证：$\angle QSR$的大小是常数.

25. 已知圆锥曲线的一段弧，说明怎样确定它是抛物线的一部分、椭圆的一部分或双曲线的一部分.

26. 已知椭圆的两条切线和一个焦点，求其中心的轨迹.

27. 设圆锥曲线的一条切线交两条准线于点 L，M. 如果 S，H 是焦点，LS，MH 相交于 N，求证：$LN = MN$.

28. 设 PQ 是一条圆锥曲线的双纵标线，并设连结 P 点和准线足的直线交曲线于 R. 求证：QR 通过焦点.

29. 在椭圆中，两条弦 AP，BQ 延长后相交于 O；QC，PD 是平行于它们的弦，彼此相交于 R. 求证：三角形 AOB 与 CRD 相似，且 AB 平行于 CD.

30. 设两条圆锥曲线有一个公共焦点，并且只相交于两点，那么它们的公共弦通过对应准线的交点.

31. 在椭圆中有一组内接平行四边形，它们的边平行于一对等共轭直径. 求证：平行四边形的边长的平方和是常数.

32. 证明下面的圆锥曲线法线画法的正确性：作纵标线 PN，在轴上标出 NK，NL，使它们都等于 NP，延长 PK，PL，与曲线又交于 Q，Q'，取 QQ' 的中点 V，则 PV 是 P 点处的法线. 【150】

33. 设一椭圆内切于四边形 $ABCD$，并设 S 是这椭圆的一个焦点. 求证：角 ASB 与 CSD 之和等于 BSC 与 DSA 之和.

34. 从椭圆的两个焦点到椭圆上任一点处法线的距离之比，等于从这两个焦点到该点处切线的距离之比.

35. 已知圆锥曲线的两条切线和它的中心. 求证：它的焦点的轨迹是一条直角双曲线.

36. 将椭圆上任一点 P 的纵标线 PN 延长，与正焦弦一端处的切线相交于 Q. 求证：$QN = SP$.

37. 将正圆锥面的椭圆截线射影到一个垂直于轴的平面内. 求证：射影曲线的焦点位于圆锥面的轴与射影面的交点处.

38. 设 OP，OQ 是从辅助圆上一点向椭圆画出的两条切线，并设 PCP' 是这椭圆的一条直径. 求证：QP' 通过一个焦点.

39. 在一条圆锥曲线中，设弦 PQ，PQ' 与轴成等角. 求证：三角形

PQQ' 的外接圆与圆锥曲线相切于 P.

40．设在椭圆中有两个内接四边形，其中一个有三条边平行于另一个的三条边，那么它们的第四条边也互相平行. 由此说明，怎样利用一把平行尺画出椭圆在任一点的切线.（射影）

41．设 RP 是已知椭圆的任一切线，切点为 P，并设 $\angle SRP$ 的大小一定[S 为焦点]. 求证：R 的轨迹是一个圆.

42．在椭圆的点 Q，Q' 处，OQ，OQ' 是切线，QG，QG' 是法线，交长轴于 G，G'. 求证：三角形 OQG，$OQ'G'$ 相似.

43．切线 OQ，OQ' 对于通过 O 点的纵标线足的张角相等.

44．一个椭圆与一个三角形相切于各边中点. 求证：椭圆的中心是三
【151】角形的重心.

抛物线

45．设 AR，SY 分别是从抛物线的顶点和焦点到一条切线的垂线. 求证：

$$SY^2 = SY \cdot AR + SA^2.$$ (I. C. S. 1884.)

46．P 是抛物线上任一点，SR 是 AP 的垂线，交顶点[A]处的切线于 R. 求证：AR 是从 P 点到轴的垂线长 PN 的四分之一.（Clare，1888.）

47．一条抛物线与等边三角形 ABC 的三边[所在直线]相切，在 A，B，C 的对边上的切点分别为 A'，B'，C'. 求证：AA'，BB'，CC' 相交于抛物线的焦点.（Trin. 1887.）

48．一条抛物线在另一条与它相等的抛物线上滚动，开始时顶点重合. 求证：滚动抛物线在顶点处的切线总是与一个定圆相切.（Trin. 1887.）

49．P，Q 是抛物线上两点，使得以 P，Q 为圆心并通过焦点 S 的两个圆正交于 S 和 R. 设 Q 与两圆交点的连线交准线于 T 和 T'. 求证：角 TPT' 等于角 RPS 的一半.（Pemb. 1887.）

50．在抛物线中，设 $\angle ASP$ 等于直角的三分之四. 求证：P 点的纵标线与正焦弦一端的法线相交于轴上.（Magd. 1888.）

51．已知抛物线的两条切线和它们上面的切点的位置，求焦点和准线.（Qu. 1888.）

52．OP，OQ 是抛物线的两条切线，切点为 P 和 Q，S 是焦点. 若 OS

与通过 O，P，Q 的圆再相交于 T，则 S 平分 OT．(Qu．1888．)

53．设 PG 是抛物线在 P 点的法线．求证：以 G 为圆心、GP 为半径作圆，则从抛物线上任一点到此圆的切线长等于从该点到 P 点的纵标线的垂线长．(Jes．1888．) [152]

54．H 是三角形 ABC 中 A 角的外角平分线上一个定点；以 HA 为弦作一个圆，交直线 AB，AC 于 P 和 Q．求证：PQ 包络成一条抛物线，它以 H 为焦点，并且它在顶点处的切线是从 H 到 AB 和 AC 所作垂线的垂足的连线．(Jes．& c．1888．)

55．在抛物线顶点处的切线上取点 Y，Y'，使 $SY \cdot SY'$ 是常数，并设过 Y 的另一条切线和过 Y' 的另一条切线相交于 Q．求证：Q 的轨迹是圆．(Joh．1888．)

56．一个圆与抛物线相切于点 P，并且通过焦点．设 K 是圆与轴的另一交点，并设 A 是抛物线的顶点．求证：AK 等于 P 点横标线的三倍．(Sel．1888．)

57．在抛物线的一条切线上取两点 P，Q，使它们到焦点等距离．求证：从 P，Q 作的另一条切线相交于轴上．(Pet．1886．)

58．P，Q，R 是抛物线上的点，弦 PR 与通过 Q 的直径相交于 S，弦 PQ 与通过 R 的直径相交于 T．求证：ST 平行于 P 点处的切线．(Clare，1887．)

59．S 是抛物线的焦点，SL 是半正焦弦，抛物线的顶点是 A．A 点处的切线与通过 L 的直径相交于 O，在通过 O 点的任一直线上任取两点 P 和 Q．求证：从 P 点所作两条切线的切点连线与从 Q 点所作两条切线的切点连线相交于 $\angle OAS$ 的平分线上．(Trin．1886．)

60．求证：若抛物线的焦点为 S，顶点为 A，P 是轴上的一个外点，A 点处的切线与以 PS 为直径的圆相交于 Q，R，则 PQ，PR 与抛物线相切．

再证明：若一条切线交此圆于 Q'，R'，则从 Q'，R' 到抛物线所作另一条切线相交于圆上．(Trin．1887．) [153]

61．动点到一定点及一定直线距离之和为常数，证明它画出一条抛物线，并求其正焦弦的长度．(Qu．1887．)

62．抛物线通过四个已知点 A，B，C，D，其中 AB 平行于 CD．找出一种几何方法来画这条抛物线的轴．(Jes．1887．)

63．A 和 P 是两个定点．考虑那些以 A 为顶点且通过 P 点的抛物线．

求证：P 点处的切线与 A 点处切线、法线的交点在两个定圆上.（Joh. 1887.）

64. 设 PN，PL 是从 P 点到［抛物线的］轴的垂线和到顶点处切线的垂线.求证：LN 总是与一条抛物线相切.（Pet. 1886.）

65. 抛物线的一条动切线与两条定切线相交于点 T 和 T'.求证：$ST:ST'$ 是定比.（Trin. 1886.）

66. 若 QD 是到抛物线的直径 PV 的垂线，则

$$QD^2:QV^2=SA:SP.$$（Trin. 1886.）

67. 设 Y 是从抛物线的焦点 S 到 P 点处切线的垂线足，过 Y 作 YK 平行于抛物线的轴，交法线 PG 于 K，连结 SK.求证：三角形 SKG 和 SKP 的面积都等于三角形 SPY 的面积.（T.H. 1886.）

68. 设 O 是定点，MM' 是一条不通过 O 点的定直线，Q 是 MM' 上任一点，以 OQ 为底边向离开 MM' 的一侧作等腰三角形，使其顶角 $\angle OPQ$ 总是等于 OQ 与 MM' 所成锐角的二倍.求证：P 的轨迹是一条抛物线.（T.H. 1886.）

69. 设 ABC 是一条抛物线的内接三角形.求证：ABC 的各边长度是
【154】平行于它们的切线围成的三角形边长的四倍.（I.C.S. 1887.）

70. 抛物线的顶点是 A，轴是 AN_1N_2，在点 P_1，P_2 处的切线相交于 P，并且 N_1，N_2 和 N 分别是 P_1，P_2 和 P 的纵标线足.求证：

$$P_1N_1:P_2N_2=AN:AN_2=AN_1:AN.$$（I.C.S. 1887.）

71. OQ，OQ' 是抛物线的切线，OV 是一条直径.设 OV 交准线于 K，QQ' 交轴于 N.求证：$OK=SN$，其中 S 是焦点.（I.C.S. 1886.）

72. 设［抛物线］在焦点弦 PSQ 两端的切线相交于 D，则 SD 是 AS 与 PQ 的比例中项.（I.C.S. 1883.）

73. 求在一给定圆中一个给定弓形的内切圆圆心的轨迹.（Pet. 1887.）

74. PSP'，QSQ'，RSR' 是通过抛物线焦点 S 的三条弦.求证：三角形 PQR 与 $P'Q'R'$ 的面积比等于 P，Q，R 和 P'，Q'，R' 的纵标线乘积之比.（Pet. 1887.）

75. 一族抛物线都与两条已知直线相切，其中一条切于已知点.求证：焦点在一个定圆上，准线通过一个定点.（Trin. 1887.）

76. 两条相等的抛物线有公共轴，凹向相反.求证：每条抛物线中与

另一条相切的弦的中点的轨迹是一条抛物线，其大小等于原抛物线的三分之一.（Trin. 1887.）

77. 抛物线在 P 点的法线交顶点处的切线于 F，交曲线于另一点 f. 设此抛物线的轴与 P 点处的切线、法线相交于 T 和 G. 求证：

$$PF \cdot Pf = TG^2.$$ （T.H. 1888.）

78. 抛物线在任一点 P 的法线交曲线于另一点 Q；T 是弦 PQ 的极点[即过弦两端所作切线的交点]，且 T 与焦点 S 的连线与过 P 所作 SP 的垂线相交于点 O. 求证：$TS = SO$，并且 $\angle TOQ$ 是直角.（Joh. 1887.） **[155]**

79. V 是抛物线的焦点弦 QQ' 的中点，在 Q 和 Q' 处的切线相交于 T；求证：三角形 TQQ' 的外接圆与直线 TV 的交点的轨迹是一条抛物线.（Pet. 1887.）

80. 从抛物线上任一点作法线，交曲线于 P_1，P_2. 求证：弦 P_1P_2 通过一个定点.（Clare, 1887.）

81. 两条抛物线相等、有公共轴且同向放置；其中一条的切线交另一条于 P 和 Q. 求证：Q 到过 P 点直径的垂直距离是常数，而且弦 PQ 割下的弓形面积也是常数.（Pemb. 1886.）

82. 在抛物线上求一点，使在这点的法线长等于已知线段.（T.H. 1887.）

83. 如果抛物线的三条切线围成等腰三角形，那么两条相等边交点与抛物线焦点的连线通过第三边上的切点.（Cath. 1887.）

84. 两条抛物线有相同的焦点，且相交成直角. 求证：它们的顶点连线通过焦点，并且等于它们的交点的焦半径.（Joh. 1886.）

85. 设 PN 是抛物线的一条纵标线，过 N 作弦 QNQ' 交抛物线于 Q 和 Q'，则 Q 和 Q' 的纵标线的乘积等于 PN 的平方.（Sel. 1887.）

86. 设两条定直线相交于 A，且 B 是定点；过 A 和 B 作圆，交这些直线于 C 和 D，则 CD 总是与某条抛物线相切.（Sel. 1887.）

87. 若抛物线在一点的纵标线等于横标线，则在这点的法线[被曲线截得的]弦对于焦点的张角为直角.（Pet. 1885.） **[156]**

88. 设一个圆通过抛物线的焦点，并与曲线相切于 P，相交于 L 和 M，与轴相交于 N. 求证：LP 等于 MN.（Clare, 1886.）

89. 找出一种几何方法确定抛物线准线的位置，已知这条抛物线的轴平行于一条给定直线，抛物线通过两个给定点，并与通过其中一点的一

条给定直线相切.(Clare, 1886.)

90. 设对于 T 点的所有位置,抛物线的切线 TP,TQ 对于焦点的张角为常数. 求证:三角形 SPT 和 STQ 的外接圆心的距离与 ST^3 成比例.(Clare, 1886.)

91. 设 PQ 是抛物线的一条焦点弦,R 是过 Q 的直径上任一点. 求证:平行于 PR 的焦点弦长 $=\frac{PR^2}{PQ}$.(Trin. 1885.)

92. 在三角形 ABC 的边上取点 D,E,F,并且画三条具有相同焦点的抛物线,其中一条与 BF,FE,EC 相切,另外两条各与对应三线相切;S 是公共焦点,准线[两两]相交于 G,H,K. 求证:三角形 DSG,ESH,FSK 的面积之比等于 SD,SE,SF 的平方比.(Trin. 1885.)

93. 两条抛物线有公共焦点,从曲线外一点 T 向一条抛物线作切线 TP,TQ,向另一条抛物线作切线 TR,TS. 设 $\angle PTQ$ 与 $\angle RTS$ 互补,求证:PR 与 QS 平行或相交于焦点. 如果它们平行,证明它们也平行于两条抛物线的公切线.(Pemb. 1885.)

94. 从两个定点 A,B 到一条动直线作垂线 AP,BQ. 求证:若四边形 $ABQP$ 的面积为常数,则动直线的包络为抛物线.(Caius, 1885.)

95. 抛物线正焦弦一端 L 处的法线与曲线交于另一点 P,在 P 点处的切线与正焦弦的延长线相交于 M,与轴相交于 T,PN 是从 P 点到轴的
[157] 垂线. 求证:LM 是正焦弦的 $\frac{4}{3}$ 倍,NT 是正焦弦的 $\frac{9}{2}$ 倍.(K. 1885.)

96. A 是抛物线的顶点,S 是焦点,P 是抛物线上任一点;PN 是 P 的纵标线,过 S 作 SP 的垂线,交 P 点处的法线于 L;若 LM 是 L 的纵标线,求证:$SM=2AN$.(Qu. 1886.)

97. P,Q 是抛物线上任意两点,R 是连结它们的弦的中点,RM 是 R 的纵标线,垂直于轴,RG 垂直于 PQ,交轴于 G. 求证:MG 等于抛物线的半正焦弦.(Qu. 1886.)

98. 求证:在抛物线中,正焦弦是最短的焦点弦.(Cath. 1886.)

99. 作一条抛物线,使它与三条已知直线相切,并且焦点在另一条已知直线上.(Pet. 1861.)

100. 从抛物线的焦点 S 作一条直线平行于 P 点处的切线,交曲线于 Q;P 点处的直径交 SQ 于 E. 求证:E 的轨迹是一条抛物线,其正焦弦等于已知曲线的一半.(Jes. 1861.)

101. 从抛物线上一点 P 处的法线足作 GR 垂直于 SP，与以 SP 为直径的圆相交于 L，延长 LS，交 P 点处的切线于 O. 求证：比 $OS:OP$ 不变. (Sid. 1861.)

102. 抛物线通过两个定点 A 和 B，轴在给定方向上. 求焦点的轨迹. (Joh. 1861.)

103. 有一族抛物线，它们在顶点处的切线与一已知抛物线相同，并且它们的焦点在这条已知抛物线上. 求证：它们相交于这条已知抛物线的焦点. (Pet. 1861.)

104. 抛物线在任一点 P 处的切线与一个以焦点为圆心的定圆相交于 Q，R. 设通过 Q 的另一条切线与通过 R 的另一条切线相交于 T，并设圆在 Q 和 R 处的切线相交于 U. 求证：TU 平行于准线. (Pet. 1882.)

105. 在抛物线的一条焦点弦的中点作直线垂直于准线，并在线上取线段长等于弦的一半. 求线段端点的轨迹. (Clare, 1882.) [158]

106. 从 P 点作 PM 垂直于抛物线在顶点处的切线，又作 MQ 垂直于 AP. 求证：Q 的轨迹是一个圆. (T.H. 1882.)

107. 过抛物线轴上一定点作一条弦 PQ，再作一个圆，其半径为已知，并且通过点 P 的和 Q 的纵标线足. 求证：圆心的轨迹是一个圆. (Jes. 1882.)

108. 一个圆与一已知圆正交，并在一已知直线上截下给定长度. 求证：圆心轨迹是一条抛物线，并且它与已知圆相交所得的弦的包络是一条圆锥曲线. (Jes. 1886.)

109. PSP' 是抛物线的一条焦点弦. 通过 P，P' 的直径分别与点 P'，P 处的法线相交于 V，V'. 求证：$PVV'P'$ 是平行四边形. (Jes. 1886.)

110. ACP 是圆的一个扇形，其圆心为 C，半径 CA 是固定的. 作一个圆与弧 AP 外切，并且与 CA 及 CP 的延长线都相切. 求证：所作圆的圆心轨迹是一条抛物线. (Joh. 1885.)

111. 已知抛物线的轴的方向，且曲线与一个三角形的各边相切. 证明如下作焦点方法的正确性：过三角形的一个顶点 A 作直线 AD 垂直于给定方向，交[三角形的外接]圆于 D，过 D 作 DS 垂直于对边，交圆于 S；则 S 是焦点. (Pet. 1884.)

112. 设 P，Q，R 是抛物线上三点，S 是焦点. 过 R 作 RU 和 RV 分别平行于 P 点和 Q 点处的切线，与通过 Q 的直径相交于 U 和 V. 用几何方

法证明：$RU^2 = 4SP \cdot QV$.

利用这个结果，对下面的命题给予几何证明：

抛物线的切线 TQ 和 TR 与 P 点处切线相交于 X 和 Y. 在通过 T 点的直径端点处的切线交 P 点处切线于 O. 那么，若 S 为焦点，则 $SP \cdot QR =$
【159】 $2SO \cdot XY$.（Joh. 1886.）

113. 两条抛物线有公共的焦点和轴，但凹向相反，任一平行于轴的直线与两条抛物线相交于 P 和 P'，它们的公共弦 QQ' 与 PP' 相交于 R. 求证：$RQ \cdot RQ' : PP'^2$ 为定比.（Pet. 1884.）

114. 抛物线的三条切线所成三角形的外接圆通过焦点. 求证：这个圆在焦点处的切线与抛物线的轴所成的角等于抛物线的三条切线与轴所成角的代数和.（Pet. 1884.）

115. PQ 是抛物线在 P 点的法线，T 是它的极点. 求证：过 T 点作直径，则 PS 通过此直径的端点.（Pet. 1885.）

116. 动直线总是被两个定圆截得相等的弦. 求证：它总是与一条抛物线相切，并且这抛物线的焦点平分两圆圆心的连线.（Pet. 1885.）

117. 将抛物线上每一点的纵标线向轴的对面延长，直到长度等于该点到焦点的距离. 求证：延长线端点的轨迹是另一条抛物线，并且两曲线的轴的交角等于直角的一半.（Clare, 1885.）

118. 抛物线的两条定切线 TQ，TR 与一条动切线相交于 X 和 Y. 作抛物线的弦，使它平行于 XY，并且等于 XY，那么它包络成一条相等的抛物线.（Trin. 1884.）

119. 过抛物线上任一点 P 作一直线垂直于连结 P 点和顶点的直线. 这条线交轴于 K，而 P 点处的法线交轴于 G. 求证：GK 等于正焦弦的一半.（Trin. 1884.）

120. 过抛物线上任一点作两条弦，使它们与这点的切线夹角相等. 求证：它们的长度与它们的对应直径夹在它们和曲线之间的部分成比例.
【160】（Trin. 1884.）

121. PSp 是抛物线的一条焦点弦，以 PS 和 pS 为直径作圆. 求证：它们的公切线长是 AS 和 Pp 的比例中项.（Trin. 1885.）

122. 直线 PQ 与两条互相垂直的定直线 Ox，Oy 相交于点 P，Q，并且 PQ 的中点在定直线 AB 上. 求证：直线 PQ 总是与一条定抛物线相切.（Trin. 1885.）

123. 设 PG 是抛物线在点 P 的法线，交轴于 G；又设 GQ 是立足于 G 的纵标线. 求证：PG 与 QG 的平方差是常量. (Pemb. 1885.)

124. 在一条有心圆锥曲线中，若直径 CT 与一条对应于它的弦 QQ' 相交于 V，与曲线相交于 P，与 Q 点处的切线相交于 T，则 $CV \cdot CT = CP^2$. 导出对于抛物线的相应性质.

125. 设 PSQ 是抛物线的一条焦点弦，PG 是 P 点处的法线，PN 是半纵标线，并设 PN 延长后，与通过 Q 的直径相交于 H，那么 HG 垂直于 PG. (T.H.1885.)

126. 从抛物线的准线上一点 O 作两条切线，过焦点 S 作两条直线[分别]平行于这些切线，那么准线夹在这些平行[于切线的]直线间的线段被 O 点平分. (Chr. 1885.)

127. 一条无端点的弦 OPQ 结紧在 O 点，上面穿着两颗小珠 P，Q；弦保持拉紧；小珠移动，使得 OP 总是等于 OQ，并且 PQ 的方向固定. 求证：P 和 Q 的轨迹是以 O 为公共焦点的两条抛物线弧. (Qu. 1885.)

128. O 是定圆上的一个定点；以圆上任一点 S 为焦点，O 点处的切线为准线，作一条抛物线. 求证：从 O 点到抛物线所作切线的切点的轨迹是一个圆. (Qu. 1885.) 【161】

129. 从抛物线上任一点作[两条]弦，使它们与这点的切线成等角. 求证：它们的比等于平行焦点弦的比. (Cath. 1885.)

130. C 是一个已知圆的圆心，D 是圆周上的定点，M 是任意一条平行于 DC 的弦 RS 的中点. 求证：CR，CS 与 DM 的交点在一条抛物线上. (Jes. 1885.)

131. 点 O 关于一条抛物线的极线交轴于 U，一条通过 U 点且垂直于极线的直线交 OS 于 R. 求证：$OS = SR$. (Jes. 1885.)①

132. 已知三条抛物线有一条公共切线. 求证：它们的另外几对公切线的交点共线. (Joh. 1884.)

133. 已知抛物线的两条切线，那么从焦点到它们的切点弦所作的垂线通过它们从顶点处切线上截得线段的中点. (Joh. 1884.)

---

① 译者注：从点 O 作圆锥曲线的两条切线，切点的连线记为 l，那么直线 l 是 O 点关于这条圆锥曲线的极线，O 是 l 关于这条曲线的极点.

134. 画出成对的相等抛物线，它们都以定点 S 为焦点，一条与给定直线 AB 相切，另一条与给定直线 AC 相切. 求证：各对抛物线的公切线的包络是一条抛物线，其准线通过 S，并且它与 AB，AC 相切，切点与 S 在一直线上.（Joh. 1884.）

135. OXP，OYQ，XRY 是一条抛物线（焦点为 S）的三条切线，切点分别为 P，Q，R. 求当切线 XY 改变位置时，圆 SXP 和 SYQ 的另一交点的轨迹.（Pet. 1883.）

136. 如果两条抛物线有公共焦点，那么这焦点与两曲线准线交点的连线垂直于抛物线的公切线.（Clare，1884.）

137. ［内、中、外］三条抛物线有公共的顶点和轴，并且它们的正焦弦成几何级数. 求证：若 PQ 是由外抛物线上一点向中间抛物线所作一对切
【162】线的切点弦，则 PQ 与内抛物线相切.（Clare，1884.）

138. 任作一条抛物线与一个固定三角形的三边相切，那么每条切点弦都通过一个定点.（Trin. 1884.）

139. 一个圆以抛物线的焦点［S］为圆心，与 P 点处的切线的一个交点在准线上，另一个交点为 T. 作 SP 的垂线 TM，必要时可延长［SP］. 求证：SM 等于正焦弦的一半.（Pemb. 1884.）

140. 从抛物线外一点 O 作两条切线 OQ，OQ'，又从 O 点作轴的垂线，交它于 N. 求证：NQ，NQ' 与轴的夹角相等.（Caius，1884.）

141. 两条抛物线有相同的焦点和轴，一条抛物线上一点 P 处的切线与另一条上一点 Q 处的切线垂直相交于 T. 求证：T 点到通过 P 和 Q 的直径距离相等.（Chr. 1884.）

142. 抛物线在其任一点 P 的切线上，被夹在一条焦点弦两端的切线之间的部分，对于过 P 的直径与此弦的交点的张角为直角.（Caius，1883.）

143. 过一定点［M］任作一直线［a］，过这定点［M］作它的一条垂线［b］，与一定直线［l］相交［于 B］，再通过交点［B］作定直线［l］的垂线［c］. 求证：这条线［c］与第一条线［a］的交点的轨迹是一条抛物线.（Clare，1883.）

144. 一组平行线中的任意一条与两条固定抛物线分别相交于 P，P' 和 Q，Q'. 通过点 P，P' 和通过 Q，Q' 分别作直线平行于该点所在抛物线的轴. 求证：这样得到的平行四边形的顶点在一条固定的圆锥曲线上.（Chr. 1884.）

145. A 是抛物线的顶点，P 是这曲线上任一点，延长 AP 到 Q，使 PQ

$=AP$;过 Q 作直线 MQL 垂直于 AQ,交轴于 M.如果 QL 等于 QM,求证:L 的轨迹是一条抛物线,并且求出 L 点处的法线.(Qu. 1884.)

146. 设[抛物线]在 P 点处的法线交轴于 G,[A 为顶点,]则三角形 APG 的外接圆心的轨迹是一条抛物线.(Qu. 1884.) 【163】

147. 给定了抛物线的三条切线和其中一条上的切点,求焦点,并且画抛物线.(Cath. 1884.)

148. 等腰三角形外切于一条抛物线.求证:三边和三条切点弦交准线于五点,使得任意两个相邻点间的距离对于焦点的张角相等.(Trin. 1886.)

149. 设 PP' 是抛物线的任意一条垂直于轴的弦,通过 P' 的直径交 P 点处的切线和法线于 Q 和 R,则 QR 的中点在一条定抛物线上.(Jes. 1884.)

150. 抛物线上两点 P,Q 处的切线相交于 T,同样这两点处的法线相交于 O.作 TL,ON 垂直于轴,交轴于 L 和 N.求证:

$$TL \cdot AL = ON \cdot AS.$$ (Jes. 1884.)

151. 抛物线在点 Q 和 P 的切线相交于 T,作两条直径三等分 PQ.如果在它们[这些直径]的端点处的切线中有一条垂直于 TP,那么三角形 PTQ 是等腰三角形.(Joh. 1883.)

152. 设抛物线的弦 PQ 是 P 点处的法线,T 是它的极点,又设 QP 延长后交准线于 R.求证:$\angle RTQ$ 是直角.(Joh. 1883.)

153. PG 是抛物线在点 P 的法线,从 PG 的中点 R 作此曲线的另外两条法线 RQ,RQ'.求证:QS,$Q'S$ 与轴的夹角相等.(Joh. 1884.)

椭圆

154. 直线 AB 和 AC 互相垂直,都是椭圆的切线,O 是椭圆的中心;两直线分别与以 O 为圆心、OA 为半径的圆相交于第二点 B 和 C.求证:BC 和 OA 与椭圆的一对共轭直径重合.(I.C.S. 1887.) 【164】

155. 设椭圆在一点 P 的法线交轴于 G,过焦点 S 作 PSK,交共轭于 CP 的直径于 K.求证:CG 与 SK 的比等于离心率.(I.C.S. 1885.)

156. 作一个椭圆,使它以两个已知点为焦点,一条已知直线为切线.(I.C.S. 1884.)

157. 求证:若 CP 和 CD 是椭圆的一对共轭半径,将椭圆在点 P 和 D

的法线交点与中心 C 相连,则所得直线垂直于 PD.(I.C.S. 1885.)

158. 设 X,X' 是椭圆的准线足,对应焦点为 S,S',又设 SY,SY' 是到任意一条切线的垂线,则直线 XY 和 $X'Y'$ 的交点在短轴上.(I.C.S. 1883.)

159. 设 CL 是从椭圆的中心到它上面一点 P 处切线的垂线在短轴上的射影.求证:若 PQ 是三角形 SPS' 的外接圆直径,则

$$PQ\cdot CL=AC^2.\text{(Pet. 1887.)}$$

160. 从椭圆内一点 O 作两条互相垂直的法线 OA,OB,它们与椭圆分别再相交于 C 和 D.求证:

$$OA:OB=OC:OD.\text{(Pet. 1887.)}$$

161. 在椭圆中,弦 P_1P_2 的垂直平分线交短轴于 K.求证:$CK=e\cdot CN$,其中 CN 是 P_1P_2 的中点的横标线,从中心 C 开始测量,e 是离心率.(Pet. Pemb. & c. 1888.)

162. 在两条定直线上取长度 CA,CB,使它们的平方和为常数,作平行四边形 $ABPC$.求证:P 的轨迹是一个椭圆,而且它在这两条直线上的截距相等.(Clare & c. 1888.)

163. 将椭圆上任一点 P 与两条共轭半径 CA,CB 的端点相连,得到 PA,PB,分别交 CB,CA 于 B',A'.求证:

【165】 $$AA'\cdot BB'=2CA\cdot CB.\text{(Clare & c. 1888.)}$$

164. 一个椭圆完全包围了一个与它有相同中心的圆.求证:椭圆被圆的切线截得的部分,仅当切线平行于椭圆的轴时,其面积为极大或极小.区分不同情形[何时极大?何时极小?](Clare & c. 1888.)

165. 如果 P,Q,R,S 是椭圆上四点,使得中心平分一条轴夹在弦 PQ 和 RS 之间的部分,那么中心也平分这条轴夹在弦 PR 和 QS 之间的部分,以及夹在弦 PS 和 QR 之间的部分.(Trin. 1887.)

166. 从辅助圆一条直径两端作椭圆的切线.求证:它们的交点在准线上.(Trin. 1888.)

167. 在一个动直角三角形 PQR 中,角 Q 是直角,并且这三角形内接于已知圆,其圆心为 C.如果边 QR 保持通过圆内的定点 S,求证:PQ 与一个椭圆相切;且若 QC 与 PS 的交点为 O,则 RO 与 PQ 的交点是 PQ 与椭圆的切点.(Lond. 1st B.A. Hon. 1870.)

168. 证明椭圆有一对等长的共轭直径[简称为等共轭直径].如果将

椭圆长轴一端与等长共轭直径之一的一端相连，从短轴两端作直线平行于连线，那么这些平行线与椭圆的交点是另一条等长共轭直径的端点.(Lond. 1st B.A. Hon. 1870.)

169. 在已知三角形中有一内切椭圆.如果知道一个焦点的位置，说明怎样求椭圆和它与三角形各边的切点.(T.H. 1888.)

170. 设在椭圆中有一内接四边形 $PQRS$，使得 PQ 与 SR 平行.作出椭圆的平行于 QR 和 PS 的切线.求证：切点连线平行于 PQ 和 SR.(Mag. 1888.) [166]

171. PQ 是抛物线的一条弦，T 是它的极点；作一个椭圆，使它外接于三角形 PTQ，并且中心在 PQ 上.设椭圆在 T 点的切线关于抛物线的极点为 K.求证：TK 平行于椭圆中与 PQ 共轭的直径.(K. 1887.)①

172. 设 P，Q 是两个有相同焦点的椭圆上的点，它们的连线对于两个公共焦点的张角相等.求证：在 P 点和 Q 点[分别作各自所在椭圆]的切线的夹角，等于 PQ 对于任一焦点的张角.(K. 1887.)

173. 从圆上任一点 P，作 PM 垂直于此圆在圆上一定点 A 的切线.求证：PM 的中点轨迹是一个椭圆，并求其中心和轴.(Qu. 1888.)

174. 椭圆的中心是一条抛物线的焦点，并且它的两条准线是这抛物线过正焦弦两端的直径.求证：这个椭圆与抛物线相切于两点.(Qu. 1888.)

175. 将椭圆上一点 P 的纵标线 NP 延长后，与从[中心] C 向 P 点处切线所作垂线相交于 R.求证：R 的轨迹是一个椭圆，并且已知椭圆在 P 点，Q 点和 R 点的切线、辅助圆以及 R 的轨迹都通过同一点.(Cath. 1888.)②

176. 两个圆分别与一椭圆相切于共轭点 P 和 D，并且都通过[中心] C.求证：它们的半径之比，等于 CP 与 CD 之比.(Cath. 1888.)

177. 一条抛物线通过已知椭圆的两个焦点，并且抛物线的焦点是椭

---

① 译者注：当一直线 a 与抛物线无公共点时，为了求 a 关于抛物线的极点，可在 a 上任取两点 M，N，过 M 作抛物线的两条切线，切点连线 m 是点 M 的极线，类似地作出点 N 的极线 n，则两直线 m 和 n 的交点 A 就是直线 a 的极点.

② 译者注：原文未说明 Q 点的位置，这里按原题照译，供研究参考.

圆上的一点.求证:抛物线的准线必与椭圆的辅助圆相切.再证明:从椭圆的两个焦点作抛物线的切线,其交点在一个圆上.(Jes. & c. 1888.)

178. 过定点 O 任意作已知椭圆的一条弦 PQ;过 P 和 Q 作一个椭圆,使它具有指定大小、与已知椭圆相似,并以同样方式放置.求证:所作
[167] 椭圆的中心的轨迹是椭圆.(Jes. & c. 1888.)

179. 在椭圆短轴两端的切线中,一条与正焦弦相交于 E,另一条与对应准线相交于 F.求证:EF 是椭圆的一条切线.(Jes. & c. 1888.)

180. 从椭圆上任一点 P 作小辅助圆的切线,交准圆于 Q,R.求证:PQ,PR 等于 P 点的焦半径.(Jes. & c. 1888.)①

181. 给定了椭圆的两个轴,证明可用如下方法确定曲线上的各点:以每个轴为直径作圆,从圆心作射线交两圆于 P 和 Q;过 P 作直线平行于长轴,过 Q 作直线平行于短轴,两直线相交于椭圆上一点 R.

再证明:如果作一个同心圆,其半径等于半轴之和,并设射线 OPQ 交此圆于 V,则 VR 是椭圆在点 R 处的法线.(Joh. 1887.)

182. PSQ 和 $PS'R$ 是椭圆的焦点弦.求证:P 点处的切线和弦 QR 交长轴所得两点到中心的距离相等.(Joh. 1888.)

183. 一个平行四边形外切于椭圆.求证:过平行四边形每一边两端和一个焦点所作的圆都相等.(Chr. 1884.)

184. 已知一个椭圆的中心、一条切线、长轴的长度和准线上一点.说明怎样求准线.在什么情形下作法失败?(Pet. 1886.)

185. PP' 是椭圆的一条直径,P 点处的切线与两条准线相交,将每个交点与对应焦点相连.求证:连线相交在 P' 的纵标线上.(Clare, 1887.)

186. 作椭圆的两条切线 TP 和 TQ,再作一条任意弦 TRS,设 V 是截
[168] 得部分[RS]的中点;QV 交椭圆于 P'.求证:PP' 平行于 ST.(Trin. 1886.)

187. 在椭圆上取两点 Q 和 R,设 DD' 是一条直径,QD 与 RD' 相交于 P.求证:如果有一个与已知椭圆相似且以同样方式放置的椭圆,以 D 为中心、通过 P 点,那么它从 $D'P$ 上截得的弦以 DR 为直径,从 $D'Q$ 上截得的弦以 DQ 为直径.(Trin. 1886.)

---

① 译者注:"小辅助圆"是以椭圆短轴为直径的圆,准圆是到椭圆所作两条切线互相垂直的点的轨迹.

188. 椭圆在任一点 P 的切线交短轴于 T,作 TM 垂直于 SP 的延长线.求证:M 的轨迹是一个圆.(T.H.1887.)

189. O 是椭圆外任一点,作它与焦点 S,S' 的连线 OS,OS',交曲线于 P,Q,再连结 SQ 和 $S'P$,相交于点 R,那么四边形 $OPRQ$ 有内切圆.(T. H. 1883.)

190. 设椭圆在点 P 和 P' 的切线交点在辅助圆上.求证:SP 与 $S'P'$ 平行.(T.H. 1887.)

191. 设 Y 和 Y' 是从椭圆的两个焦点到 P 点处切线的垂线足,PN 是 P 点的纵标线.求证:PN 平分角 YNY'.(Mag. 1887.)

192. 设 CP,CD 是椭圆的共轭半径,PG 是 P 点处的法线,CZ 是从 C 点到 P 点处切线的垂线,GM 是过 G 点平行于 CD 的直线,交 P 与一焦点的连线于 M.求证:PM 是 CZ,CB,CD 的第四比例项.(Mag. 1887.)

193. 如果 P 和 Q 是一个椭圆上的点,S 和 H 是焦点,那么四条直线 SP,SQ,HP,HQ(必要时可延长)是同一个圆的切线.(Qu. 1887.)

194. 一族同焦椭圆任一轴上一定点所作切线的切点在一个圆上.(Qu. 1887.)

195. 设 Y 和 Z 是从椭圆的两个焦点到 P 点处切线的垂线足.求证:辅助圆在 Y 和 Z 的切线相交在 P 点的纵标线上,并且它们的交点的轨迹是一个椭圆.(Cath. 1887.) 【169】

196. 椭圆在点 P,P' 的切线相交于 T,法线分别交轴于 G,G'.求证:PG,$P'G'$ 对于 T 点的张角相等.(Jes. 1887.)

197. 求证:如果抛物线通过两个定点,这两点在一已知圆的一条直径上且到圆心等距离,并且抛物线以圆的一条切线作为准线,那么抛物线的焦点的轨迹是一个椭圆,其焦点就是两个定点.(Jes. 1887.)

198. 求证:从椭圆的一条直径一端,向以短轴为直径的圆作[两条]切线,与它的共轭直径两端的焦半径组成平行四边形,其[邻]边长之差等于短半轴.(Jes. 1887.)

199. 在椭圆中作内接三角形,使它相似于一个已知三角形.(Clare, 1883.)

200. 椭圆的两条共轭直径交辅助圆于 P 和 Q.设 P' 和 Q' 是椭圆上对应于 P 和 Q 的点.求证:[椭圆]在 P' 和 Q' 处的切线成直角.(Jes. 1887.)

201. CA, CB 是椭圆的定共轭直径，CP, CQ 是动共轭直径；AP、BQ 相交于 L. 求证：L 的轨迹是一个相似的并以同样方式放置的椭圆. (Jes. 1887.)

202. 设 TP, TP' 是椭圆的两条切线，PG, $P'G'$ 是在 P 和 P' 处的法线，并设在 TP 和 TP' 上取点 Q, Q'，使 $TQ = TG$, $TQ' = TG'$. 求证：$QQ' = 2PU$，其中 U 是 GG' 的中点. (Joh. 1886.)

203. 设一个矩形外切于椭圆，证明它的两条对角线沿着共轭直径的方向. (Joh. 1887.)

204. TP 和 TQ 是椭圆的两条切线，S 是一个焦点. PQ 和 ST 相交于 X. 从 PQ 的中点 V 作 ST 的垂线 VY. 求证：

【170】 $$PV^2 : PX \cdot XQ = SY : SX.$$ (Joh. 1887.)

205. T, T' 分别在椭圆的半轴 CA, CB[的延长线]上，TT' 平行于 AB. 求证：从 T 和 T' 分别向两个相邻的四分之一椭圆各作一条切线，那么这两条切线平行于一对共轭直径. (Pet. 1885.)

206. 设 SY 是从椭圆的焦点 S 到 P 点处切线的垂线. 求证：SY, CP 相交在准线上. (Pet. 1886.)

207. PP' 是椭圆的一条直径，在点 P 和 Q 处的切线成直角. 求证：椭圆在 Q 点的法线平分 $\angle PQP'$. (Clare, 1886.)

208. Pp 是椭圆的弦，垂直于 AC，延长后交辅助圆于 P' 和 p'，P 点的法线交 CP' 和 Cp' 于 Q 和 q. 求证：

$$PQ = Pq = CD, \quad P'Q = BC.$$ (Clare, 1886.)

209. 椭圆在一点 P 的切线交长轴[的延长线]于 T, CD 是平行于 PT 的直径. 求证：

$$TP^2 + CD^2 = ST \cdot TH.$$ (Clare, 1886.)

210. 如果 P 是椭圆上一点，焦半径 SP 交共轭直径于 E，那么 CP 与 SE 的平方差是常数. (Trin. 1885.)

211. 在椭圆上取两个定点 Q, R 和一个动点 P. 求证：三角形 PQR 的垂心的轨迹是一个相似的椭圆. (Trin. 1886.)

212. 两个椭圆有一个公共焦点和相等的长轴. 如果一个椭圆在自己的平面内绕着它的焦点旋转，证明它与另一椭圆的公共弦包络成一条与这椭圆有相同焦点的圆锥曲线. (Trin. 1886.)

213. 从椭圆上一点 R 作两条弦 RQ, RQ' 平行于共轭直径 CP 和 CD,

R 点的切线交 QQ' 的延长线于 T. 求证:

$$\frac{RQ^2}{QT}:\frac{RQ'^2}{Q'T}=CP^2:CD^2.$$ (Trin. 1886.) [171]

214. 两个同心椭圆有相同的长轴,其短半轴为 CB 和 Cb;第一个椭圆上任一点 P 的纵标线交第二个椭圆于 p. 求证:

$$CP^2-CB^2:Cp^2-Cb^2=CA^2-CB^2:CA^2-Cb^2.$$ (Trin. 1886.)

215. 一族椭圆有相等的长轴. 这些椭圆有一个固定的公共焦点和一个固定的公共点. 求证:两个相邻椭圆沿着过定点的动焦点弦相交. 再证明:交点的轨迹是一个椭圆,以定焦点和定点为自己的两个焦点. (Pemb. 1885.)

216. TP 和 TQ 是椭圆在共轭直径端点的切线, S 是焦点, TR 是 SP 的垂线. 求证: TR 等于短半轴. (Caius, 1885.)

217. 已知椭圆的一个焦点、一条切线的位置和短轴的长度. 求证:其中心的轨迹是一条直线. (Caius, 1885.)

218. 一条已知线段的一端在圆周上移动,圆半径等于这条线段的长,同时这线段的另一端在这个圆的一条定直径上移动. 求证:动线段上每一点画出一个椭圆. 再证明:每个椭圆两条半轴的和等于圆的直径. (T. H. 1886.)

219. 设 PQ 是椭圆的一条弦, R 是平分 PQ 的直径 CR 的端点, P', Q', R' 是辅助圆上对应于 P, Q, R 的点. 求证: R' 是弧 $P'Q'$ 的中点. 又若 CR' 交椭圆于 T, 并且 T' 是辅助圆上的对应点, 证明 CT' 垂直于 PQ. (K. 1885.)

220. 从椭圆的辅助圆上一点 T 到长轴作纵标线 $TPP'N$, 交椭圆于 P, 交 T 点所作切线的切点弦于 P', 交长轴于 N. 求证:

$$NP^2=NP'\cdot NT.$$ (Qu. 1886.) [172]

221. A, B 是两个已知点. 作椭圆, 使它们具有已知的离心率, 通过 A 点, 以 AB 为 A 点处的法线, 并且轴通过 B 点. 求焦点的轨迹. (Cath. 1886.)

222. PN 是到椭圆中一条固定直径的纵标线, 在它上面(必要时可延长)取一点 Q, 使 NQ 与 NP 之比等于共轭于 PN 的直径与平行于 PN 的直径的比. 证明 Q 的轨迹是一个椭圆, 并确定其轴的位置. (Pet. 1861.)

223. 设 P, Q 是椭圆上的两点, 其横标线之和为常数, 则 P 点处和 Q

点处切线交点的轨迹是一个相似的并以同样方式放置的椭圆，通过已知椭圆的中心.（Caius，1861.）

224. $TYLZ$ 是椭圆在正焦弦一端 L 处的切线，交长轴于 T，交辅助圆于 Y，Z.求证：比 $YL:YZ$ 等于正焦弦与 2 倍长轴的比.（Jes. 1861.）

225. TP，TQ 是椭圆在 P，Q 的切线；T 点到一个同焦椭圆所作的切线 TV 交 PQ 的延长线于 V. 求证：

$$VP:VQ=TP:TQ.$$（Trin. 1861.）

226. 如果椭圆在一点的法线被一个轴截得的线段等于这个点的一条焦半径向量[长]，那么法线被另一个轴截得的线段等于这个点的另一条焦半径向量[长].（Pet. 1861.）

227. 从抛物线上一点作一直线垂直于准线，交点为 M. 求证：AP 与 SM 的交点的轨迹是一个椭圆，其中 A 是已知曲线的顶点，S 是焦点.（Clare，1882.）

228. 两个椭圆有相等的短轴和一个公共的焦点. 用几何方法证明：
[173] 在一个椭圆中连结公切线切点的线段与长轴成比例.（Clare，1882.）

229. 设 S，S' 是椭圆的焦点，P，Q 是椭圆上任意两点. 从 S' 分别到 P 点处和 Q 点处的切线作垂线，与 SP，SQ 的延长线相交于 P'，Q'；R 是两直线 PQ，$P'Q'$ 的交点，那么 $S'R$ 平分三角形 $PS'Q$ 的外角.

230. 椭圆的中心是 C，从它的焦点 S，H 作 SY，HZ 垂直于 P 点处的切线；延长 SP、HZ，相交于 T；延长 TC，YS，相交于 Q. 再延长 TS，与三角形 TQY 的外接圆相交于 R. 求证：R 的轨迹是一个圆.（Jes. 1882.）

231. 从椭圆上任一点 P 作弦 PQ，PQ' 平行于轴，那么 P 点处的法线将 QQ' 分成定比.（Jes. 1882.）

232. 从一点 T 作椭圆的切线 TP，TQ. 如果 $\angle PTQ$ 的平分线通过这条圆锥曲线长轴上一个定点 O，那么 T 的轨迹是一个圆.（Jes. 1882.）

233. 设 TP，TQ 是从辅助圆上一点 T 到椭圆的一对切线. 求证：连结 $SS'PQ$，所得的四边形有两边平行. 再证明：若 O 是对角线交点，则 $\angle CTP$，$\angle OTQ$ 相等.

234. 设椭圆在其两点 P，Q 处的切线交点在一个与它有相同中心的圆上. 求证：直线 PQ 与一条同心共轴椭圆相切，且此椭圆两轴之比是第一个椭圆两轴之比的 2 倍. 再证明：如果 PQ 不垂直于椭圆的轴，那么 PQ 与它的包络的切点不是 PQ 的中点.（Jes. 1886.）

235. P 是定圆上的任一点，PL 有已知方向并有定长，以 PL 为直径的圆交已知圆于另一点 Q.求证：PQ 总是与一个定椭圆相切.(Jes.1886.)

236. 求证：椭圆的任一焦点弦是长轴和平行于此弦的直径的第三比例项.(Jes.1886.) [174]

237. PSQ 是椭圆的一条焦点弦，P 点和 Q 点的切线相交于 Z.求证：

$$SZ^2 + BC^2 : 2SZ^2 = CA : PQ.$$ (Jes.1886.)

238. 设椭圆在共轭点 P 和 D 的法线相交于 E.求证：CE 垂直于 PD.(Joh.1885.)

239. 一个圆通过椭圆的两个焦点和短轴一端，并与这曲线交于 P 和 Q.求证：从中心到 P 点和 Q 点处切线的距离都等于从中心到焦点的距离.(Joh.1885.)

240. 设一个圆在一个半径是它2倍大的圆周内滚动.求证：滚动圆面内的每一点画出一个椭圆.再证明：半径中点画出的椭圆，与半径延长线上到动圆圆心距离等于其直径的点画出的椭圆，是相似的曲线.(Joh.1885.)

241. 椭圆的两条平行切线与它相切于 P 和 Q.在 R 点的另一条切线交这些平行切线于 T 和 T'，PT' 和 QT 相交于 V.求证：RV 平行于 PT 和 QT'，并且等于其调和平均值的一半.(Joh.1885.)

242. 证明一个椭圆存在准圆，并且证明椭圆的准线是准圆和对应焦点处的点圆的根轴.(Joh.1886.)

243. 从椭圆的中心 C 作 CK 垂直于椭圆上一点 P 处的切线，三角形 PKB 的外接圆交长轴于 M，以 M 为圆心、CB 为半径作圆，交短轴于 N 和 N'.求证：四边形 $MNGN'$ 外切于圆[G 是 P 点处法线与长轴的交点].(Pet.1884.)

244. 椭圆过两个定点 A，B，相似于一个定椭圆并以同样方式放置，两者相交于 C 和 D.AC、AD 与定椭圆再相交于点 E 和 F.求证：直线 CD 和 EF 各通过一个定点.(Pet.1884.) [175]

245. 设 S 和 H 是椭圆的焦点，TP，TQ 是两条互成直角的切线，TM 垂直于 SP.求证：

$$ST \cdot HT = 2TM \cdot AC.$$ (Pet.1884.)

246. 两个椭圆的焦点相同，从外椭圆上的点作内椭圆的切线.求切点弦的包络.(Clare,1885.)

247. 过椭圆长轴上一定点任作一弦，以这弦为直径作圆. 求证：连结椭圆与圆的另外两个交点的直线通过长轴上第二个定点.（Clare，1885.）

248. AA'是椭圆的长轴，S 和S'是焦点，作 AR，$A'R'$平行于 SP 和$S'P$，交 P 点处切线于R 和R'. 求证：

$$AP + A'R' = AA'.$$（Clare，1885.）

249. 设椭圆在其点 P 处的切线和法线分别交长轴于 T 和 G. 求证：所有截距为 GT 的圆有公共的根轴.（Clare，1885.）

250. 在同一平面内，两个椭圆有一个公共焦点，其中一个椭圆绕公共焦点旋转，而另一个保持不动. 求证：它们的公切线交点的轨迹是一个圆.（Trin. 1885.）

251. 从椭圆的一个顶点作 AQ 垂直于任一点 P 处的切线. 求证：PS 与 QA 延长线交点的轨迹是一个圆，这里 S 是一个焦点.（Trin. 1885.）

252. 椭圆的焦点是 S，S'，过中心作两条相等的定长线段分别平行于 SP 和PS'，其中 P 是椭圆上一点. 求证：以相等线段为邻边的平行四边形
【176】的第四个顶点的轨迹是一个圆.（Trin. 1885.）

253. S 和H 是椭圆的焦点，T 是长轴延长线上一点. 以 SH 为直径作圆. 再作一个圆，使它与第一个圆相交成直角，并且与长轴在 T 点也相交成直角. 求证：后作的圆与椭圆的交点在 T 关于椭圆的极线上.（Pemb. 1883.）

254. 椭圆在其点 P 的法线交轴于G，G'. 求证：若 CK 是从中心到P 点处切线的垂线，O 是 CG 的中点，O'是 CG'的中点，那么 $OB = OK = OP$，$O'A = O'K = O'P$.（Trin. 1885.）

255. SY 和HY'是从椭圆的焦点S 和H 到一条切线的垂线，X 和X'是对应的准线足. 求证：XY 和$X'Y'$相交在短轴上.（Trin. 1885.）

256. 在纸上画了一个椭圆，说明怎样求它的主轴.（Trin. 1885.）

257. 设 P 是椭圆长轴一端A 处切线上任一点，并设 PT 是从P 到椭圆的另一条切线. 求证：PT 大于PA.（Pemb. 1885.）

258. 两个相似的并以同样方式放置的椭圆，中心为 C、C'，相切于一个顶点 A. 过 A 作一条弦. 分别交两个椭圆于 P，Q；PC，QC'相交于R. 求R 的轨迹.（Pemb. 1884.）

259. 从椭圆的辅助圆上任一点 T 作切线，与曲线相切于 P 和Q. 设 Pp，Qq 是通过这些点的直径. 求证：Pq 和Qp 是焦点弦.（Pemb. 1884.）

260. 一个三角形的顶点分别是已知椭圆上的一点、椭圆的中心和一个焦点.求证:这个三角形的重心的轨迹是一个相似的椭圆.(T.H.1885.)

261. 如果椭圆在其任一点的切线交长轴两端的切线于 R 和 R',那么以 RR' 为直径的圆通过焦点.(T.H.1885.) [177]

262. 在椭圆的长轴上任意取定两点.过其中一点作直线平行于 $S'P$,过另一点作两条直线分别平行于 YS,YS'.求证:后者与前者的交点是一个定圆的一条直径的两端.(T.H.1885.)①

263. PGg 是椭圆在 P 点的法线,交轴于 G 和 g.以 Gg 为直径作一个圆,再以 P 为圆心作另一个圆,交前圆成直角,交 PGg 于 Q,Q'.求证:三角形 SPQ,$S'PQ'$ 相似.(Chr.1885.)

264. 从已知圆上任一点 Q 作 QR 垂直于一条定切线,弦的分点 P 使 $QP:PR$ 为已知比.求证:P 的轨迹是一个椭圆.(Qu.1885.)

265. 如果通过椭圆正焦弦两端的直径是共轭直径,那么连结焦点的线段对于短轴一端的张角是直角.(Qu.1885.)

266. 如果椭圆在其点 P 的法线通过短轴端点,那么以焦点连线为直径的圆与椭圆在 P 点的切线相切.(Qu.1885.)

267. 一个圆通过椭圆的一个焦点 S,并与这椭圆相切于两个关于轴成对称的点 P 和 Q.求证:$SP = SQ =$ 正焦弦.(Cath.1885.)

268. 利用射影,从下面的定理导出相应结果:如果 OA 和 OB 是圆中互相垂直的半径,P 和 Q 分别是 OA 和 OB 延长线上的点,$AP \cdot BQ$ 等于圆半径平方的2倍,那么 PB 与 QA 的交点在这个圆上.(Joh.1884.)

269. CA,CB 是椭圆的半轴.作矩形 $ACBV$,若曲线平分 SV.求证:

$$AC^2 + BC^2 = 2AC \cdot CS.\text{(Pet.1883.)}$$

270. 从通过椭圆焦点且垂直于轴的直线上任一点作椭圆的两条切线.求证:它们夹在准线间的线段被轴平分.(Pet.1883.) [178]

271. PSQ,PHR 是椭圆的焦点弦,QT,RT 是在 Q,R 处的切线.求证:PT 是 P 点处的法线.(Pet.1884.)

272. TP,TQ 是椭圆在 P 和 Q 处的切线;Cp,Cq 分别是平行于它们的半径;Tp,PC(必要时延长)相交于 L;Tq,QC 相交于 M;PM,QL 延长后

---

① 译者注:原文未说明 P 和 Y 的位置.

相交于 V.求证:TCV 是一直线.(Pet.1884.)

273. 圆和椭圆有一条公共直径,从这条直径[延长线]上任一点作椭圆的和圆的切线.求证:连结切点的直线平行于一条定直线.(Clare,1884.)

274. 一族椭圆有公共的中心,并且已知两条共轭直径的方向,又知道它们的轴的平方和.求证:它们都与四条直线相切.(Clare,1884.)

275. 过已知点 O 作已知椭圆的一条弦 OPQ.求乘积 $OP\cdot OQ$ 的逗留值,并且区别极大值和极小值.(Trin.1883.)

276. P,Q,R 是椭圆上的三点,C 是中心,RP,RQ 与平分 PQ 的直径 ACA' 相交于 N 和 T.求证:$CN\cdot CT=CA^2$.(Trin.1884.)

277. 平行于椭圆任一焦点弦的直径,等于连结辅助圆上对应于这条焦点弦两端的点所得的弦.(Trin.1884.)

278. 说明怎样作已知椭圆中具有给定长度的焦点弦,并且证明:如果这样作出的两条弦是 PQ 和 $P'Q'$,那么四边形 $PP'QQ'$ 有外接圆.(Trin.1884.)

279. 如果一个三角形可以内接于椭圆,使三角形的重心位于椭圆的中心,那么这个三角形一定是最大的内接三角形.(Trin.1884.)

280. 设椭圆的法线 PG 通过 B 点.求证:BG 等于两焦点间距离的一
【179】半.(Pemb.1884.)

281. 已知椭圆的一条切线、它的切点和一个焦点,求其中心的轨迹.(Caius,1884.)

282. 椭圆的焦点是 S 和 H,在它的一对切线 TQ,TQ' 上,取 TR,TR',使它们分别等于 TS 和 TH.求证:RR' 等于长轴;且若 TS 交 RR' 于 W,则 TW 等于 TQ.(Caius,1884.)

283. 一条已知线段,一端在圆周上移动,圆半径等于这条已知线段,另一端在圆的一条定直径上移动.求证:动线段上每一点画出一个椭圆.再证明:每个椭圆的半轴之和等于圆直径.(Mag.1884.)

284. 如果椭圆在其一点 P 的切线交顶点 A 处的切线于 T,S' 是离 A 点较远的焦点,那么 TA 等于从 T 到 $S'P$ 的垂线.(Qu.1884.)

285. 设 CY、CZ 是[从椭圆中心 C]到 P 点处切线的垂线,D 是[P 的]共轭点,D' 是直径 CD 的对面端点.求证:PD' 是三角形 YCZ 的外接圆的直径.(Qu.1884.)

286. 椭圆的辅助圆已经给出,又知道椭圆的一条切线,其切点为已知点.求椭圆的焦点.(Cath.1884.)

287．设 AA' 是椭圆的长轴，并设 Y, Y' 是从焦点到曲线在任一点处切线的垂线足．求证：AY 与 $A'Y'$ 的交点的轨迹是一个椭圆．(Trin.1885.)

288．从 C 到 QQ' 的垂线交辅助圆于 R；过 C 作直线平行于 PR，与过 V 且垂直于 QQ' 的直线相交于 O，QVQ' 是对于直径 CP 的双纵标线．求证：若一椭圆过 Q 和 Q'，以 O 为中心，且长轴与已知椭圆的相等，则其短轴等于 DCD'．(Trin.1886.) 【180】

289．过椭圆的焦点 S, H 作两条直线 PSP'，QSQ'，与两条切线 PQ，$P'Q'$ 相交，并且使 PP'，QQ' 分别被点 S 和 H 平分．求证：四边形 $PQQ'P'$ 有外接圆．(Jes.1884.)

290．在椭圆中，从 G 和 C 到 CP 和 P 点处切线的垂线相交于 H，以 CH 为直径的圆交 P 点处切线于 L．求证：CL 等于从 P 点到以短轴为直径的圆的切线长．(Jes.1884.)①

291．椭圆的互成直角的切线的交点轨迹是一个圆．(Jes.1884.)

292．一个圆通过椭圆的两个焦点，并与曲线相交于一条轴两侧的点 P 和 Q．求证：从中心到 P 点处和 Q 点处切线的垂线长的平方和等于 AC 的平方．(Joh.1883.)

293．从[椭圆的]焦点 S, H 作 SO，HO' 垂直于 SP，HP，交 P 点处的法线于 O, O'．求证：OO' 被短轴平分．(Pet.1883.)

双　曲　线

294．已知双曲线两个轴 ACA'，BCB' 的大小和位置，用几何方法作一对共轭直径 PCP'，DCD'，使它们的夹角等于已知角．(I.C.S.1886.)

295．一条直线与双曲线的一对共轭直径相交于 P 和 D，与第二对相交于 P' 和 D'；设 O 是这条直线夹在渐近线间线段的中点，求证：

$$OP \cdot OD = OP' \cdot OD'.$$ (I.C.S.1886.)

296．已知双曲线的一个焦点、一条切线和共轭轴的长度．求证：其中心的轨迹是一直线．(I.C.S.1885.) 【181】

297．设双曲线的两条切线交点在共轭双曲线的一支上．求证：它们

① 译者注：本题原文未说明 G 点位置，现按原题照译，供研究参考．

的切点弦与另一支相切.(I.C.S.1885.)

298. 通过双曲线上一点 P 的纵标线足 N 作 NQ 平行于 AP、交 CP 于 Q. 求证:AQ 平行于 P 点处的切线.(I.C.S.1884.)

299. 等边三角形的两个顶点分别是双曲线的中心和一个焦点、三角形的一边是渐近线.求另外两边与曲线的交点.(I.C.S.1883.)

300. 设三角形两边的方向一定,第三边过一定点,则此三角形外接圆心的轨迹是一条双曲线.(I.C.S.1883.)

301. 一个圆以直角双曲线的一条弦为直径,弦的两端在双曲线的不同分支上.求证:从圆与双曲线的另一交点到这条弦的垂线是双曲线的切线.(Pet.1887.)

302. 已知双曲线的两条渐近线和一条切线的位置,说明怎样作曲线.(Pet.1887.)

303. 圆与直角双曲线相交于四点,这些点都在一条已知抛物线上.求证:双曲线的一个轴平行于抛物线的轴.再证明:当双曲线(或圆)的中心画出一条曲线时,圆(或双曲线)的中心画出一条全等的曲线,并且两个中心在它们各自的曲线上沿相反方向移动.(Pet.1887.)

304. 有一条抛物线和一条直角双曲线,双曲线的一条渐近线是抛物线的轴,两条曲线都外接于三角形 PQR,三角形的各边分别与抛物线的轴相交于 p,q,r.设 A 是抛物线的顶点,PN 是 P 的纵标线.求证:

【182】 $Aq + Ar = AN$.(Pet.Pemb.&c.1888.)

305. 取三个已知点中的每一对作为焦点作双曲线通过第三点.求证:这样作出的三条双曲线交于同一点.(Trin.1888.)

306. 证明通过一个三角形的三个顶点及其三条高线交点的圆锥曲线都是等边双曲线,并且确定这些双曲线的中心的轨迹.(Lond.1st B.A.Hon.1872.)

307. 在双曲线上取两点 P、Q,使得 P 点处的切线与过 Q 而平行于一条渐近线的直线相交于另一条渐近线上.求证:Q 点处的切线与过 P 而平行于第二条渐近线的直线相交于第一条渐近线上.(Trin.1888.)

308. 在纸上画了一条双曲线.你怎样找出它的横轴、共轭轴和渐近线?(T.H.1888.)

309. 已知双曲线的两条渐近线和曲线上一点,求焦点、准线和顶点.(C.C.C.1888.)

310．C 是直角双曲线的中心，直线 LQ 平行于一条渐近线 CM，交另一条于 L，角 QCM 的平分线交双曲线于 P．求证：CQ 与 CP^2 成比例，这里 Q 是直线 LQ 上任一点．(Cath．1888．)

311．从直角双曲线的两个焦点到任一点 P 处切线作垂线，交曲线于点 K，L，M 和 N．求证：$KLMN$ 是平行四边形，它有两边垂直于过 P 点的直径．(Jes．&c．1888．)

312．已知双曲线的一条渐近线和双曲线上三点，作另一条渐近线．(Jes．&c．1888．)

313．设 P 是双曲线上任一点，AA' 是它的横轴，并设 $A'P$ 和 AP 交一条准线于 E 和 F．求证：EF 对于对应焦点的张角是直角．(Joh．1888．) 【183】

314．一条直角双曲线以正方形的两边为渐近线，[两边夹角的]对顶点为一个焦点．求证：它平分另外两边．(Joh．1888．)

315．一个椭圆的长轴和短轴的方向和大小都与一条双曲线的两个轴相同；从一条渐近线上任一点 T 作椭圆的切线 TQ，TQ'．求证：三角形 TQQ' 的外接圆通过双曲线的中心．(Clare，1887．)

316．$ABCD$ 是矩形．有两条等边双曲线，其渐近线平行于矩形的边，[两条曲线]分别通过 A 和 C，以及 B 和 D．求证：一条双曲线的中心对于另一条的极线，重合于后一条的中心对于前一条的极线．(Trin．1886．)

317．P 是三角形 ABC 平面内一点，使得从 A，B，C 分别到 PB，PC，PA 所作垂线交于一点．求证：P 的轨迹是一条双曲线，外接于三角形 ABC，并且通过从 A，B，C 向三角形对边所作垂线与从 B，C，A 分别作 BA，CB，AC 的垂线的交点．(Trin．1886．)

318．求证：在互相共轭的两条双曲线中，平行焦点弦的比，等于双曲线的离心率的比．(Trin．1887．)

319．求[双曲线的]切线与过一焦点且与此切线成定角的直线的交点的轨迹．(Trin．1887．)

320．P 是双曲线一支上的点，其顶点为 A，LPL' 是 P 点处的切线，两端到渐近线为止，$MPAM'$ 是一条直线，两端终止于过较远顶点且分别平行于两条渐近线的直线上．求证：LM 与 $L'M'$ 平行．(Mag．1887．)

321．设 P 和 Q 是直角双曲线上任意两点，C 是轴的交点，PT 是 P 点处的切线，QM 和 QN 分别是从 Q 到 CP 和 PT 的垂线．求证：CM 与 CN 相等．(Mag．1887．) 【184】

322．设[双曲线]在 P 点处的切线交两条渐近线于 L 和 M，那么三角形 LCM 的外接圆心的轨迹是一条双曲线，它的两条渐近线与原双曲线成直角．(Qu.1887.)

323．Ox，Oy 是两条定直线；A 在 Ox 上，B 在 Oy 上，并且 $OA=OB$．过 A，B 任意作两条互相平行的直线 AM，BN，分别交 Oy 和 Ox 于 M 和 N．求证：MN 的中点的轨迹是一条双曲线．(Cath.1887.)

324．有一个圆，通过两个定点 S，S'．两条定直线垂直于 SS'，并且到它的中点等距离．圆与这两条直线相交于点 P，Q 和 P'，Q'．求证：若 PP' 不平行于 SS'，则它与一条以 S，S' 为焦点的定圆锥曲线相切．(Jes.&c.1887.)

325．直角双曲线通过一条定圆锥曲线上的两个定点 P，Q，并且有一条渐近线平行于一条已知直线．求证：如果它与已知圆锥曲线再相交于 R 和 S，那么直线 PR 和 QS 相交在一条定圆锥曲线上．(Jes.1887.)

326．OX，OY 是定直线；A 是 OX 上的定点，P 是 OY 上的动点；PM 垂直于 AX，在 PM 上取 Q，使 $AQ=PM$．求 Q 的轨迹．(Jes.1887.)

327．P 是圆上任一点，AB 的圆的定直径．过 B 作直线交 PA 延长线于 Q，使 BP，BQ 与 AB 成等角．求 Q 的轨迹．(Jes.1887.)

328．设三角形 ABC 内接于一条直角双曲线．求证：它的垂心 P 也在这条双曲线上．

如果通过 P 作弦 PA'，PB'，PC' 平行于三角形的边，证明 AA'，BB'，CC' 平行．(Joh.1886.)

329．A 和 C 是直角双曲线不同支上的点，以 AC 为直径的圆与曲线再相交于 B 和 D．求证：双曲线上任一点到四边形[$ABCD$]各边的距离成
[185] 比例．(Joh.1886.)

330．三角形的底边 AA' 的大小和位置都是一定的．求证：如果两个底角的差是直角，那么顶点的轨迹是一条直角双曲线．

如果 PN 是 AA' 的垂线，NQ，NQ' 是从 N 到以 AA' 为直径的圆的切线，证明 PQ 通过 A'，PQ' 通过 A；再证明若 QQ' 交 AA' 于 M，则 PM 是 P 点处的切线．(Joh.1887.)

331．如果一族直角双曲线外接于一个三角形，那么它们的中心都在九点圆上．

如果这个三角形是直角三角形，那么所有双曲线都有一条在直角顶

点处的公共切线.(Pet.1886.)

332. 用几何方法证明:在一族同焦椭圆上,切线平行于已知直线的点的轨迹是一条等边双曲线.(Clare,1886.)

333. 设椭圆的共轭直径 PCp, DCd 是双曲线的渐近线,QQ' 是一条公共弦,$Q'R'$, QR 是椭圆中分别平行于 CD 和 CP 的弦.求证:

$$Q'R' : QR = CD : CP.$$ (Clare,1886.)

334. 求证:一条双曲线和一个圆的公共弦可以配对,使每一对公共弦与渐近线的交点都是共圆点;并且这些圆都与已知圆同心.(Trin. 1886.)

335. 在三角形中,已知它的底边,又知道它的两个底角的差,证明顶点的轨迹是一条直角双曲线.什么时候三角形的底边是横轴?(Caius, 1885.)

336. 设两条同心直角双曲线有一条公共切线,那么它们的横轴夹角等于各自的中心与切点连线夹角的一半.(T.H.1886.)

337. 在双曲线中,已知两条渐近线和曲线上一点的位置,求顶点的位置.(T.H.1886.) [186]

338. 双曲线的四条切线围成一个矩形.设此矩形的一边 AB 交双曲线的一条准线于 X,并设 S 是对应的焦点.求证:三角形 XSA 和 XSB 相似.(Chr.&E.1885.)

339. 在直角双曲线中,弦 PQ 与 P 点处切线的夹角等于弦 PQ 对于过 P 的直径另一端点的张角.

340. 两条直角双曲线相切于 P,又相交于 R 和 S.求证:以 RS 为直径的圆通过 P 点和两条[曲线的]过 P 的直径的[另一]端点.(Chr.&E. 1885.)

341. 等边三角形内接于一条直角双曲线,求其外接圆心的轨迹.(Qu.1886.)

342. 在直角双曲线中,求证:任一点处法线在这一点和轴之间的部分,等于共轭双曲线中与此法线垂直的半径.(Joh.1861.)

343. 抛物线通过两个定点 A 和 B,而且它们的轴平行于一条已知直线;若一条切线垂直于 AB,证明其切点的轨迹是一条双曲线.(Joh.1861.)

344. 一条线段在两条互相垂直的直线之间移动,使它对于直角平分线上一个定点的张角是直角的一倍半.求证:它总是与一条直角双曲线相

切(Joh.1861.)

345. 求证:如果直角双曲线的焦点与一个椭圆的相同,那么它与这椭圆的交点是椭圆的共轭直径的端点.(Pet.1861.)

346. 抛物线在 P 点处的切线交顶点处的切线于 Y.延长纵标线 PN
[187] 到 R,使 $RN=PY$.求证:R 的轨迹是一条直角双曲线.(Jes.1882.)

347. A 和 B 是已知圆上的定点,CD 是任意一条有已知长度的弦.如果 CE 是平行于 AB 的弦,并设 AE,BD 相交于 O,那么 O 的轨迹是一条直角双曲线.(Jes.1882.)

348. 已知双曲线的辅助圆和曲线上一点.求证:焦点的轨迹是一条双曲线.(Jes.1886.)①

349. 求证:如果两个相等的圆与两条已知平行直线相切于已知点 A 和 B[每个圆各与其中一条直线相切],并且它们的圆心在 AB 同侧,那么它们的交点轨迹是一条双曲线.(Jes.1886.)

350. 求证:直角双曲线的两条切线的夹角与切点弦对于中心的张角相等或互补,并且这些角的平分线的交点在切点弦上.(Jes.1886.)

351. 直角双曲线在其一点 P 处的切线交渐近线于 K 和 L,P 点处的法线交轴于 G.求四边形 $CKGL$ 的外接圆的圆心.(Joh.1885.)

352. 两条双曲线有相同的横轴,一条直线垂直于横轴,交这两条曲线于 P 和 P'.求证:P 点处的切线和 P' 点处的切线相交在横轴上.(Pet.1884.)

353. 双曲线在一点 P 的切线交一条渐近线于 T.作直线 $R'PR$ 平行于这条渐近线,交一条准线于 R',交直线 ST 于 R,其中 S 是与这条准线对应的焦点.求证:$R'P=RP=SP$.(Clare,1885.)

354. 求证:如果双曲线在其一点 P 的切线交一条渐近线于 T,那么 CT 与 HP 的夹角是角 STP 的二倍,这里 C 是曲线的中心,S 和 H 是焦点.(Trin.1884.)

355. 求证:如果 CP,CD 是双曲线的一对共轭半径,S 和 H 是焦点,
[188] 那么 D 点到过 C 而平行于 HP 的直线的距离等于短半轴.(Trin.1885.)

① 译者注:双曲线的辅助圆就是以横轴 AA′为直径的圆,见第 4 章图 4-13.

356. 双曲线在一点 P 的切线交渐近线于 Q, q; QM, qm 是 Q, q 的纵标线, CT 是从中心到 P 点处切线的垂线. 设 TM, Tm 分别交 P 点处法线于 K, L. 求证: $QKqL$ 是菱形. (Pemb. 1885.)

357. 把双曲线定义成从两条定直线上截得常数面积三角形的动直线的包络. 求证: 这样定义的双曲线有两条渐近线, 并且动直线与双曲线的切点是它[夹在渐近线间线段]的中点. (G.&C. 1885.)

358. 求证: 两条同心直角双曲线在一交点处的切线夹角是它们横轴夹角的 2 倍. (T.H. 1885.)

359. 设 PQ 是直角双曲线的任一直径, 以 P 为圆心、PQ 为半径作圆, 那么若 A, B, C 是圆与双曲线的另外三个交点, 则 ABC 是等边三角形. (K. 1884.)

360. 一个圆与已知直角双曲线相交于 A, A', P, P'. 求证: 双曲线在 P, P' 的切线交点位于双曲线中与 AA' 垂直的直径上. (Chr. 1885.)

361. S 是抛物线的焦点, A 是顶点, SA 交准线于 X; SXH 是 $60°$ 的角, SH 垂直于 SX. 求证: 可以作出一条双曲线, 它以 S 和 H 为焦点, 并与抛物线相切于一点 P, 使得这一点的焦半径等于正焦弦. (Qu. 1885.)

362. 过一已知点 P 任意作一直线, 交两条定直线于 P' 和 Q'. 在 $P'PQ'$ 上取一点 Q, 使 $QQ' = PP'$. 求证: Q 的轨迹是一条双曲线. (Cath. 1885.)

363. 双曲线在任一点的切线和法线分别交渐近线和轴于四点, 它们都在通过双曲线中心的一个圆上, 并且圆半径与从圆心到切线的垂线长成反比. (Joh. 1884.) [189]

364. 设双曲线的渐近线夹角等于直角的一半, 求(并且画出)三角形 CHK 的垂心的轨迹, 这里 H 和 K 分别是过 P 而平行于一条渐近线的直线与另一条渐近线的交点. (Pet. 1883.)

365. 如果[双曲线]在一点 L 的切线交一条渐近线于 T, 并且连结 L 和[曲线上]另外两点 M 和 N 的两条弦交此渐近线于 A 和 O. 求证: $TA = A'O$, 其中 A' 是 MN 与这条渐近线的交点. (Clare, 1884.)

366. $ABCD$ 是平行四边形; 从 BC 上任一点 E 作 AD 的垂线 EF, 又作 EG 垂直于 AE, 点 F 和 G 在 AD 上, 在 AB 上取一点 K, 使 $AK = FG$. 求证: FG 总是与一条定双曲线相切. (Trin. 1884.)

367. 从双曲线上任一点 P 作渐近线的垂线 PM 和 PN, PN 与曲线再

相交于 P'．求证：PM 与 $P'N$ 之比对于 P 的所有位置都相同．(Pemb. 1884.)

368．一族圆通过两个定点，作它们的平行切线．求证：切点的轨迹是一条直角双曲线．(Chr. 1884.)

369．点 A,B,C,D 在一条双曲线上，直线 AB,CD 相交在一条渐近线上．求另一条渐近线．(Pet. 1884.)

370．从直角双曲线横轴上一点 T 作切线，分别与两个顶点处的切线相交于 Q 和 Q'．求证：QQ' 切辅助圆于一点 R，使得 RT 平分 $\angle QTQ'$．(Trin. 1885.)

371．一条直线平行于三角形 ABC 的边 AC，交 AB 于 P，交三角形 ABC 的外接圆在 C 点的切线于 Q．求证：CP,BQ 的交点的轨迹是一条直
[190] 角双曲线．(Jes. 1884.)

372．已知双曲线的一条渐近线和曲线上两点．求证：轴的包络是一条抛物线．(Jes. 1884.)

373．过一定点作双曲线的弦．求证：这些弦的中点的轨迹是一条双曲线，相似于原双曲线或其共轭双曲线．(Joh. 1883.)

374．在一个平坦场地上，来福枪开枪声和子弹击中枪靶的声音在同一瞬间听到，求听者的轨迹．(Joh. 1884.)

375．在直角双曲线中，设 PQ 是一条弦，CV 是共轭于 PQ 的直径，那么 PQ 与 P 点处切线的夹角等于角 VCP．(Sel. 1884.)

376．从共轭双曲线上一点 K 作[直线] $KQPpq$，交双曲线于 P,p，交渐近线于 Q,q．求证：$KP\cdot Kp=2KQ\cdot Kq$．(Pet. 1883.)

377．P,Q 是双曲线上两点，过 P 作直线平行于一条渐近线，过 Q 作直线平行于另一条渐近线，交前一条平行线于 T，P 点和 Q 点处的切线分别交 TQ,TP 于 p,q．求证：pq 平行于 PQ．(Pet. 1883.)

378．设 S,S' 是双曲线的焦点，X,X' 是对应准线与 SS' 的交点，SY，$S'Y'$ 是到一条切线的垂线，又设 $XY,X'Y'$ 与辅助圆再相交于 y,y'．求证：yy' 也是双曲线的一条切线．(Pet. 1883.)

379．通过直角双曲线的两条弦中每一条的中点作直线平行于另一条，那么所作两线的交点、中心和这两个中点在同一个圆上．(Clare. 1883.)

380．通过双曲线的内接三角形的两个顶点作两条直线平行于渐近

线，与对边相交，那么交点连线平行于第三个顶点处的切线.（Clare，1883.）

381. 设 QV 是直角双曲线中对于直径 PCp 的一条纵标线.求证：QV 是三角形 PQp 的外接圆在 Q 点处的切线.（T.H.1883.） [191]

一般圆锥曲线

382. S 和 H 是圆锥曲线的两个焦点，对应准线分别与这圆锥曲线的一条切线相交于点 L 和 M.设 N 是 LS 与 MH 的交点（必要时可延长）.求证：$LN = MN$.（I.C.S.1885.）

383. 已知一条圆锥曲线的一个焦点和曲线上两点.求证：准线足的轨迹是一个圆.（I.C.S.1884.）

384. 在一条有心圆锥曲线中，设 PK，PL 是 P 点处的切线和法线，并设 KSL 平行于 $S'P$，这里 S 和 S' 是焦点.求证：$KS = SL$.（Pet.1887.）

385. P 点处的切线交长轴于 T，从两个焦点到这条切线作垂线，再从垂足到长轴作垂线，分别交曲线于 L，L'.求证：T，L，L' 在一直线上.（Clare &c.1888.）

386. 设一条动直线被两条定直线截得的线段对于一个定点的张角大小为一定，证明它与以这定点为焦点的圆锥曲线相切.（Trin.1888.）

387. 设 A，B 是有心圆锥曲线一条直径上的两点，C，D 是共轭直径上的两点.求证：如果 AC 的极点在 BD 上，那么 AD 的极点也在 BC 上.（Lond.1st B.A.Hon.1870.）

388. 求证：如果两个三角形外切于一条圆锥曲线，那么它们内接于另一条圆锥曲线.（Lond.1st B.A.Hon.1876.）

389. 若干个圆与一条圆锥曲线相切于同一点.求证：连结交点的弦都平行.（Lond.2nd B.A.1873.）

390. 一族圆锥曲线有一个公共焦点和一条公共准线.一条直线垂直于准线，交这些圆锥曲线于点 P，Q，R，….求证：从公共焦点到点 P，Q，R，…处的切线所作的垂线足都在一条通过准线足的直线上.（Jes.&c. [192]
1888.）

391. 求证：如果等腰三角形的内切椭圆的长轴平行于底边，那么长轴一端的轨迹是一条抛物线，它的顶点是从等腰三角形顶点到底边垂线的中点.（Jes.&c.1888.）

392. 两条圆锥曲线有一个焦点和一条准线是公共的，两点 P,Q 各在一条圆锥曲线上，使得 $\angle PSQ$ 取常值，等于 α. 求证：P 点处和 Q 点处的切线交点在一条有同样焦点和准线的圆锥曲线上.（Joh. 1887.）

393. 求证：将一条圆锥曲线的两个焦点分别与这曲线上一点 P 相连，所得直线各与曲线再相交于 Q 和 R，那么直线 QR 总是一条同心共轴圆锥曲线的切线.（Joh. 1887.）

394. 圆锥曲线在其一动点 P 处的切线与一条定切线相交于 Q，从焦点 S 作直线垂直于 SQ，交 P 点处的切线于 R. 求证：R 的轨迹是一条直线.（Joh. 1888.）

395. 设圆锥曲线在其任一点 P 的切线交横轴于 T，并设 S 是焦点. 求证：这条圆锥曲线是椭圆、抛物线或双曲线，要看 ST 大于、等于或小于 SP 来决定.（Trin. 1886.）

396. C 是一条已知圆锥曲线的中心，O 是一个已知点，CO 与这圆锥曲线的交点在 C 与 O 之间；直线 $OPRQ$ 交圆锥曲线于 P 和 Q，交共轭于 CO 的直径于点 R，这里 R 在 P 与 Q 之间. 求证：$\frac{RP}{PO}+\frac{RQ}{QO}$ 与 $OPRQ$ 的方向无关.（Trin. 1886.）

397. 一条圆锥曲线有一个已知焦点 S 和一条已知焦点弦 PSQ. 设 P 点处的法线交轴于 G，求 G 的轨迹.（Pemb. 1886.）

398. 一条圆锥曲线通过一个已知点 P，并在这点有定切线 PT. 长轴垂直于定直线 PU，并且等于已知线段. 求证：中心在一条双曲线上，其渐
【193】近线为 PU，PT.

399. 设 P 是圆锥曲线上任一点，PK 是到准线的垂线，延长 KP 到 [Q，]使 PQ 等于 P 的焦半径，那么 Q 的轨迹是另一条圆锥曲线.（Cath. 1887.）

400. 找出一种线性平面几何画法[即在一个平面里只用直尺画直线的作图方法]，作两条圆锥曲线的公切线，已知这两条曲线至少有两个实交点.（Joh. 1886.）

401. 球面过一定点，并且与两个已知平面相切. 求证：切点在两个圆上，并且球心的轨迹是一个椭圆.

如果两平面的夹角是等边三角形的一个角，求证：椭圆的两个焦点间的距离是长轴的一半.（Joh. 1887.）

402. TP, TQ 是圆锥曲线的两条切线,S 是焦点,这些切线分别与对应准线相交于 L, M.求证:TS 平分$\angle LSM$.(Pet.1885.)

403. 一条圆锥曲线内切于一个三角形,已知它的一个焦点,说明怎样求另一个焦点.能有多于一个解吗?(Pet.1885.)

404. 求证:一条圆锥曲线的焦点弦的中点轨迹是一条相似的圆锥曲线.(Pet.1886.)

405. 两个相似的并以同样方式放置的圆锥曲线相交于 A, B.一条公共切线交它们于 P, Q,延长 PQ 到 R,使 $QR = PQ$.设 RA, RB 与通过 P 点的那条圆锥曲线相交于 H, K,并设 HK 交 QP 延长线于 S.求证:$PS = PQ$.(Pet.1886.)

406. 一条圆锥曲线外接于三角形 ABC,并且有一个焦点在 BC 上,求对应准线的包络.又若$\angle A$ 是直角,求证:包络是抛物线.(Trin.1885.)

407. 求证:若 A, B, C 是三个已知点,则可作两条抛物线通过 A 和 B 且以 C 为焦点,并且这些抛物线的轴平行于过 C 点并以 A 和 B 为焦点的双曲线的渐近线.(Trin.1886.) 【194】

408. 如果两条圆锥曲线有一条公共准线,那么它们的四个交点在一个圆上.(Caius,1885.)

409. 求证:如果椭圆的一条切线与长轴所成的角等于另一条切线与短轴所成的角,并且两条切线不垂直,那么它们的交点的轨迹是一条直角双曲线,其顶点是椭圆的焦点.(Chr.&c.1885.)

410. 椭圆的长轴和短轴分别是双曲线的共轭轴和横轴,双曲线的渐近线 CP 交椭圆于点 P.求证:如果延长 CP 到 P',使 $PP' = CP$,并设 PM, $P'QM'$ 垂直于 CA,分别交它于 M, M', Q 是 $P'QM'$ 与双曲线的交点,那么 QM 是 Q 点处的切线.(Sid.1861.)

411. 有两个相似的并以同样方式放置的椭圆,它们的两对公切线相交于 S, S',并与其中一个椭圆的一条切线相交于 V, T 和 V', T',与另一个椭圆的一条切线相交于 v, t 和 v', t'.求证:如果 $V't'$ 通过 S,那么 $T'v'$ 也通过 S.(Trin.1861.)

412. 一条抛物线和一条有心圆锥曲线相交于四点 A, B, C, D.求证:在圆锥曲线中作分别平行于 AB 和 CD 的直径,则其端点连线之一平行于抛物线的轴.(Joh.1861.)

413. 圆锥曲线在其两点 P, Q 的切线相交于 O,从 O 点作两条直线

与这圆锥曲线相交，并与横轴成等角. 设它们交 PQ 于 M，N，并设[它们被圆锥曲线截得两]弦的中点是 R，S. 求证：R，M，N，S 在一个圆上.（Pet. 1882.）

414. 两条相似圆锥曲线的准线平行，并有相同焦点 S；过 S 任意作一直线，交两条圆锥曲线于 P 和 Q，求 PQ 的中点的轨迹.（Chr. 1882.）

415. A，B，C 是三个定点；过 A 点任意作一直线，与一条已知圆锥曲线相交于点 P，Q. 求证：PB 与 QC 的交点轨迹是一条圆锥曲线.（Jes.
【195】 1886.）

416. O 是一个定点，P 是已知直线上任一点. 沿着这条直线取 PQ，使它与 OP 的比为一定. 求证：P 点与 OQ 的中点的连线总是与一条以 O 为焦点的圆锥曲线相切.（Jes. 1886.）

417. 求证：如果一个椭圆和一条双曲线的焦点相同，那么它们相交成直角，并且双曲线的渐近线通过椭圆的辅助圆上与交点相对应的点.（Joh. 1886.）

418. 从定点 A 作直线 AB，交定圆于 B；过 B 作直线 BC 垂直于 AB，交一个同心圆于 C. 求证：过 C 且平行于 AB 的直线与一条圆锥曲线相切.（Pet. 1884.）

419. 从一条有心圆锥曲线的准线上一点作两条切线，连结切点. 求证：这样得到的三角形的垂心的轨迹是一条圆锥曲线，与已知曲线相似.（Pet. 1884.）

420. 一条定直线与一族同焦圆锥曲线中的每一条相交于两点. 求证：这两点处的法线交点的轨迹是一条直线.（Pet. 1884.）

421. 以一条已知抛物线的准线上任一点为一个焦点，抛物线的焦点为另一个焦点，作一个椭圆或一条双曲线. 求证：所作曲线在它与[抛物线的]准线交点处的切线和法线也是抛物线的切线.（Pet. 1884.）

422. 圆锥曲线的一条定弦 PQ 交任一直径于 N，关于这条直径的通过 N 点的纵标线交 P 点和 Q 点处的切线于 H，K. 求证：HK 被 N 点平分.（Caius, 1883.）

423. 过圆锥曲线上一点 P 作两条弦 PQ，PQ'，过 Q，Q' 垂直于此弦的直线分别交 P 点处的法线于 N，N'. 求证：PN，PN' 的比，等于圆锥曲线
【196】 中平行于 PQ，PQ' 的直径的平方比.（Pet. 1885.）

424. 设 A，B，C，D 是圆锥曲线上的四点，在这些点的法线相交于同

一点.求证:平行于 AB,CD 的直径的平方和等于平行于 AC,BD 的直径的平方和.(Clare,1885.)

425. 一条抛物线通过相距 $2a$ 的两个定点 A、B,并且 AB 的中点到其准线的距离为 c.求证:抛物线的焦点的轨迹是一条圆锥曲线,它是椭圆或双曲线,由 c 大于或小于 a 来决定.(Trin.1884.)

426. 在一页纸上画了一个圆,将纸折叠,使纸的一角落在圆周上.求证:当纸角在圆周上移动时,纸上折痕的包络是一条圆锥曲线.(Trin.1884.)

427. 将半圆形纸片折叠,使边界直径上一个特别标注的点 P 落在圆形边界上.求证:折痕与一条定圆锥曲线相切.(Trin.1885.)

428. 如果一个圆和一条圆锥曲线相交于点 B,C,D,E,那么 BC 与 DE 夹角的平分线、BD 与 CE 夹角的平分线以及 BE 与 CD 夹角的平分线各自平行于两条定直线中的一条.(Caius,1885.)

429. TP,TP' 是一条圆锥曲线的切线,PG,$P'G'$ 是在点 P,P' 处的法线.求证:$TP:TP' = PG:P'G'$.再证明:如果 GL,$G'L'$ 垂直于 PP',那么 $PL = P'L'$.(Chr.1885.)

430. 从一点 T 作圆锥曲线的两条切线,切点为 P 和 Q,任作一条平行于 TP 的直线,交 TQ 于 L,交 PQ 于 O,交圆锥曲线于 R,S.求证:$LO^2 = LR \cdot LS$.(Qu.1885.)

431. P,Q 是椭圆上任意两点,S,H 是它的焦点;SP,HQ 相交于 M,SQ,HP 相交于 N,$\angle QSP$,$\angle QHP$ 的平分线相交于 R.求证:RP,RQ 是这个椭圆的切线,并且 M,N 是一条同焦双曲线上的点,RM,RN 是这双曲线的切线.(Jes.1885.) [197]

432. 已知一条直线,一个圆,圆心为 O,以及一点 S.直线上动点 R 与点 S 的连线交圆于 U,V.从 S 作直线平行于 OU,OV,交 RO 于点 P 和 Q.求证:这些点的轨迹是一条圆锥曲线,以 S 为焦点,已知直线为准线.

从这种形成曲线的方式推导出,从任一点到圆锥曲线的两条切线对于一个焦点的张角相等.(Joh.1884.)

433. 求证:两个同焦椭圆和两个同焦双曲线相交围成的曲线四边形的对角线相等.

证明这些结果对于一组同焦共轴抛物线也成立.(Joh.1884.)

434. 一条双曲线以椭圆的一个焦点为焦点,以[椭圆的]对应顶点处

的切线为准线．求证：从双曲线与椭圆短轴［延长线］的交点，作椭圆的切线，一定平行于双曲线的渐近线．(Joh．1884．)

435．一个椭圆和一条双曲线的焦点相同，并且相交于 P．PYZ 是双曲线在 P 点处的切线；SY，HZ 是焦点［到这切线的］垂线．求证：

$$PY \cdot PZ = BC^2,$$

其中 BCB' 是椭圆的短轴．(Pet．1884．)

436．椭圆与直角双曲线相交于 P 和 Q，椭圆的两个轴是双曲线的渐近线．PM，QN 是到轴 CA 的纵标线；PR，QT 是到轴 CB 的纵标线．求证：

$$CM^2 + CN^2 = CA^2,$$

$$CN : CR = CA : CB.$$

(Pet．1884．)

437．从圆周上一个定点 O 作弦 OA，延长到 B，使 OB 与 OA 的平方差是常数．求证：过 B 且垂直于 OB 的直线与一条圆锥曲线相切，O 点是这曲线的中心，通过 O 点的圆直径的另一端是它的一个焦点．(Clare．
[198] 1884．)

438．已知圆锥曲线的一个焦点 S 和两条切线．求证：短轴的包络是一条以 S 为焦点的抛物线．(Trin．1884．)

439．圆锥曲线的一条焦点弦 PSQ 的位置已知，轴的位置也已给出．画出这条圆锥曲线．(Pemb．1884．)

440．利用射影证明：如果 ACA' 是椭圆的长轴，PNP' 是一条双纵标线，平分 CA' 于 N，那么 P 点处的切线平行于 AP'．(Pemb．1884．)

441．一个椭圆和一条双曲线同心、共轴，一点 P 关于这两条曲线的极线垂直相交于 Q．求证：P 的轨迹是通过中心 C 的两条直线，Q 的轨迹是通过中心的另外两条直线；但若两条圆锥曲线同焦，则 C，Q 和 P 在一直线上，并且 $CP \cdot CQ$ 是常数．(Chr．1884．)

442．已知一个焦点、一条准线和离心率，找出一种几何方法，用来作出一条通过焦点的已知直线与这曲线的交点．(Qu．1884．)

443．抛物线的焦点与椭圆的一个焦点重合，并且抛物线与椭圆的短轴相切，那么椭圆与抛物线的公切线对于焦点的张角是直角．(Trin．1885．)

444．ACA' 和 BCB' 是椭圆的长轴和短轴，S 和 S' 是焦点．P 是这个椭圆与一条同焦双曲线的一个交点，并且 aCa' 是双曲线的横轴．求证：

$$SP = Aa, \quad S'P = A'a, \quad aB = CP.$$

(Trin.1885.)

445. 在一个已知圆的平面内取两个定点 P,Q,作圆中平行于 PQ 的弦 RS.求证:对于 RS 的不同位置,RP 与 SQ 的交点的轨迹是一条圆锥曲线.(Trin.1886.)

446. 圆通过一个定点,并与一条已知直线成定角.求证:圆心的轨迹
是一条圆锥曲线.(Jes.1884.) 【199】

447. 圆锥曲线的一条弦对于焦点的张角是已知角.求证:在这条弦两端的切线相交于一条圆锥曲线上,它与原曲线有相同的焦点和准线.(Joh.1883.)

448. 一个椭圆和一条双曲线有相同的横轴,并且离心率互为倒数.求证:从其中每条曲线的焦点作另一曲线的切线,这些切线在两个点相交成直角,并且切线与共轭轴的交点在辅助圆上.(Joh.1884.)

449. 从一条有心圆锥曲线上任一点 Q 作与焦点 S,H 的连线 QS,QH,与这圆锥曲线再相交于 P,P'.求证:若 P,P' 点处的切线相交于 T,则 QT 被短轴平分,并且 T 的轨迹是一条圆锥曲线.(Pet.1883.)

450. 求证:通过一条有心圆锥曲线上两点可作两个圆与这条圆锥曲线相切,并证明切点是一条直径的端点.(Caius,1883.)

圆 锥 面

451. 设 S 是圆锥面内一点;A 是圆锥面的顶点,AB 是它的轴.求证:以 S 为焦点的两个截面与 AB 所成锐角的差是角 SAB 的二倍.(I.C.S.1887.)

452. 说明怎样从一个已知圆锥面得到有最大可能离心率的截面.(I.C.S.1886.)

453. 在什么情形下,圆锥面被一个平面截得的曲线是直角双曲线?说明这时怎样确定截面必须采取的斜角.(I.C.S.1885.)

454. 说明怎样求圆锥面的双曲线截口的中心和渐近线.再说明,怎样从一个已知圆锥面截得双曲线,使它的渐近线包含最大可能角.(I.C.
S.1884.) 【200】

455. 求证:正圆锥面的椭圆截面的短轴是通过长轴两端所作圆锥面的圆形截面直径的比例中项.

如果将这椭圆射影到垂直于圆锥面的轴的平面内，求证：射影曲线的焦点间的距离等于上述两个圆形截面的半径的差.

456. 从一个已知正圆锥面截得一族抛物线，它们的轴与一条通过顶点 O 的已知直线 OM 相交. 设任一截面交 OM 于 N，求证：对于所有抛物线，$ON^2:AN\cdot CL$ 是定比，这里 A 是截线的顶点，C 是焦球的球心、L 是截面与圆锥面的轴 OL 的交点.(Pemb.1887.)

457. 如果一个圆锥面的两条截线有一条公共准线，那么这些截线的正焦弦与它们的离心率成比例.(Jes.&c.1888.)

458. 求证：[正圆锥面的]平面截线如果两焦点间距离都相同，那么它们的中心的轨迹是一个正圆柱面.(Joh.1888.)

459. 求证：[圆锥面的]平面截线如果短轴长度都相同，那么它们的中心都在由一条双曲线绕其横轴旋转所得的曲面上.(Pet.1887.)

460. 为了能作一个椭圆锥面通过两个位于不同平面内的已知圆，必须满足什么条件？(Trin.1887.)

461. 求证：如果从正圆锥面能截得一个大小和位置都已给定的椭圆，那么所有这些正圆锥面的顶点的轨迹是一条通过已知椭圆焦点的双曲线.(Jes.1887.)

462. 说明怎样作一个平面，使它截已知正圆锥面得到一个椭圆，其离心率和长轴的长度都是已知的.(Cath.1887.)

463. 设圆锥面的顶角是直角. 求证：它的一个截面的两个切[焦]球
【201】的半径之和的平方等于截面的两个轴的平方和.(Pet.1886.)

464. 两个正圆锥面，顶角都是直角，两者的顶点和一条母线相重合. 求证：当用同一平面去截它们时，一个圆锥面的截线的短轴等于另一个的共轭轴.(Clare,1886.)

465. 求证：正圆锥面的抛物线截面的正焦弦与它们的顶点到圆锥面顶点的距离成比例.(Trin.1886.)

466. 通过一条定直角双曲线作一族正圆锥面. 求证：它们的顶点的轨迹是一个椭圆，其离心率为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.(Pemb.1885.)

467. 设 P 是两个内切于正圆锥面的相交球面的一个公共点. 求证：[它们各自]在 P 点的切平面与连结 P 点和圆锥面顶点的直线成等角.(T.H.1886.)

468. 正圆柱面被一个不平行于又不垂直于它的轴的平面所截，得到的曲线是一个椭圆.（Qu.1886.）

469. 取一个正圆锥面的不同椭圆截面，使它们的轴都相等（长轴都在一个平面内）.求证：它们的中心的轨迹是一条双曲线.（Cath.1886.）

470. 确定已知圆锥面的抛物线截面，使它的正焦弦有已知长度.（T.H.1881.）

471. 求证：正圆锥面的椭圆截面的短半轴是从椭圆的两个顶点到圆锥面轴线的垂线长的比例中项.设 V 是圆锥面的顶点，R 是圆锥面的轴与截面长轴 AA' 的交点，证明：

$$CR : CA = CS : AV + CS.$$（Trin.1861.）

472. 正圆锥面被平行平面所截，得到一族椭圆截面.求证：［这些椭圆的］辅助圆在一个正锥面上，它的底面是椭圆，与已知椭圆相似.（T.H.1882.） [202]

473. 两个圆锥面的顶角互补.求证：对于从它们被平面截得的具有最大离心率的圆锥曲线，离心率倒数的平方和等于1.（Trin.1885.）

474. 说明怎样画圆锥面的截面，使它以一条已知直线为准线，这条已知直线垂直于圆锥面的轴.（Qu.1885.）

475. 已知一个椭圆和一个正圆锥面，将椭圆放到适当位置，使它成为圆锥面的截线.（Trin.1884.）

476. 求证：圆锥面的平面截线的正焦弦与圆锥面顶点到截面的垂线长成比例.（Trin.1884.）

477. 如果一个圆锥面的两个不同的平面截线有一条公共准线，那么它们的焦点连线通过圆锥面的顶点.（Qu.1884.）

478. 设圆锥面的［顶］角是直角，求证：截面的半正焦弦是长轴被圆锥面顶点到它的垂线所分成两条线段的比例中项.（Cath.1884.）

479. 两个圆锥面有公共顶点，它们的轴成直角，而且它们的顶角互补.一个平面垂直于它们两轴所在的平面，与两个圆锥面相交［分别截得一个椭圆和一条双曲线］.求证：椭圆截面的一个焦点到双曲线截面两个焦点的距离，分别等于从顶点到横轴两端的距离，并且半共轭轴的平方和等于这两个距离为边长的矩形面积.（Trin.1885.）

480. 设圆锥面截线的短轴为定长.求证：它的中心在一个旋转双曲面上.（Jes.1884.） [203]

附 录 A

椭　　圆

课题 1(续)

证明曲线在过 A 和 A' 所作垂直于轴的两直线之间.

在 SN 或 SN 的延长线上取 $SK = e \cdot XN$.

我们必须考虑, N 在什么位置时, 以 S 为圆心、$e \cdot XN$ 为半径的圆与 NP 相交; 即 SK 是大于还是小于 SN.

情形 1. 若 N 在 S 与 A 之间.



图 A1-1

[如图 A1-1, 这时有]

$$SK = e \cdot NX > e \cdot XA = SA;$$

$$\therefore \quad SK > SN.$$

情形 2. 若 N 在 S 与 A' 之间.



图 A1-2

[如图 A1－2，这时有]

$$SK = e \cdot XN,$$

$$SA' = e \cdot XA';$$

$$\therefore \quad \text{两式相减得 } KA' = e \cdot NA' < NA';$$

$$\therefore \quad SK > SN.$$

情形 3. 若 N 在 SA' 延长线上.



图 A1－3

[如图 A1－3，这时有]

$$SK = e \cdot XN,$$

$$SA' = e \cdot XA';$$

$$\therefore \quad \text{两式相减得 } A'K = e \cdot A'N < A'N;$$

$$\therefore \quad SK < SN.$$

情形 4. 若 N 在 A 与 X 之间.



图 A1－4

[如图 A1－4，这时有]

$$SK = e \cdot NX < e \cdot AX = SA;$$

$$\therefore \quad SK < SN.$$

情形 5. 若 N 在 SX 延长线上.

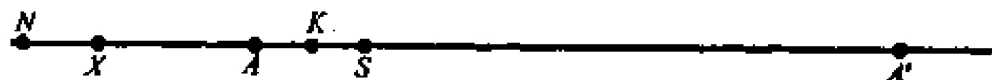


图 A1－5

[如图 A1－5，这时有]

$$SK = e \cdot XN < XN < SN.$$

现在我们已经证明了，当 N 在轴 AA' 上位于 A 与 A' 之间时，圆与垂线 NP 相交，而当 N 在线段 AA' 外部时，圆与垂线不
[204] 交．因而椭圆在过 A 和过 A' 垂直于轴的两条直线之间．

双　曲　线

课题 1(续)

证明曲线在过 A 和 A' 所作垂直于轴的两直线外部．

在 SN 或 SN 的延长线上取 $SK = e \cdot XN$．

我们必须考虑，N 在什么位置时，以 S 为圆心、$e \cdot NX$ 为半径的圆与 NP 相交；即 SK 是大于还是小于 SN．

情形 1． 若 N 在 A 与 X 之间．

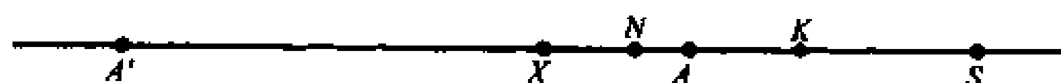


图 A2－1

[如图 A2－1，这时有]

$$SK = e \cdot NX < e \cdot AX = SA;$$

$$\therefore \quad SK < SN.$$

情形 2． 若 N 在 X 与 A' 之间．

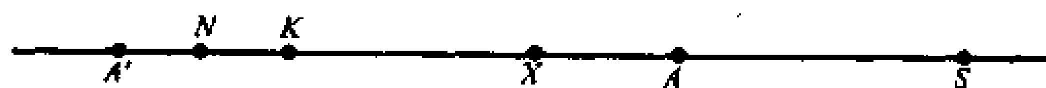


图 A2－2

[如图 A2－2，这时有]

$$SK = e \cdot XN,$$

$$SA' = e \cdot XA';$$

∴　两式相减得 $KA' = e \cdot NA' > NA'$；

$$\therefore \quad SK < SN.$$

情形 3. 若 N 在 SA' 延长线上.

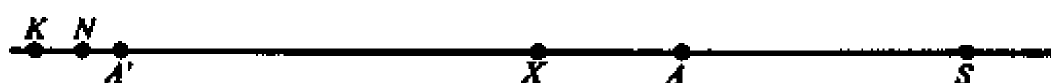


图 A2－3

［如图 A2－3，这时有］

$$SK = e \cdot XN,$$

$$SA' = e \cdot XA';$$

∴　两式相减得 $A'K = e \cdot A'N > A'N$；

$$\therefore \quad SK > SN.$$

情形 4. 若 N 在 A 与 S 之间.

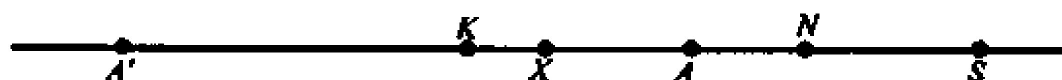


图 A2－4

［如图 A2－4，这时有］

$$SK = e \cdot NX > e \cdot AX = SA;$$

$$\therefore \quad SK > SN.$$

情形 5. 若 N 在 AS 延长线上.

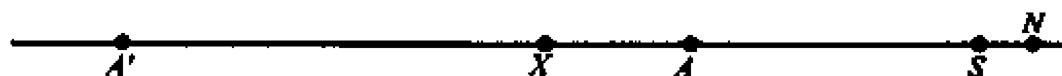


图 A2－5

［如图 A2－5，这时有］

$$SK = e \cdot XN > XN > SN.$$

现在我们已经证明了，当 N 在轴 AA' 上位于 A 与 A' 之间

时，圆与垂线 NP 不交，而当 N 在线段 AA' 外部时，圆与垂线相
[205] 交．所以双曲线在过 A 和过 A' 垂直于轴的两条直线外部．

下列重要命题在解题时可认为已知．

抛　物　线

1．设 POp 是一条弦，交直径 ANn 于 O，并设 PN，pn 是对于这条直径的纵标线，那么 $AN\cdot An = AO^2$．（见第 7 章抛物线性质 1．）

2．在图 1－17 中，作 QD 垂直于 PV[垂足为 D]，则 $QD^2 = 4AS\cdot PV$．（见命题 17 练习问题 1．）

3．任意两条切线被第三条切线分成的线段有相同的比．（参考第 8 章问题 11．）

4．在两条线段 OP，OP' 上取分点 Y，Y'，使 OY，OY' 通过线性关系 $\lambda\cdot OY + \mu\cdot OY' = 1$，其中 λ，μ 是常数；那么 YY' 的包络是一条抛物线，并与 OP，OP' 相切．

由第 3 题[按第 4 题标注字母]，得

$$\frac{PY}{OY} = \frac{OY'}{Y'P'}，即\frac{OP - OY}{OY} = \frac{OY'}{OP' - OY'}，$$

所以

$$\frac{OY}{OP} + \frac{OY'}{OP'} = 1，$$

即

$$\lambda\cdot OY + \mu\cdot OY' = 1，其中\ \lambda = \frac{1}{OP}，\mu = \frac{1}{OP'}，$$

如此等等．

5．设 S 是定点，Y 是定直线 AY 上任一点，YP 是到 SY 的垂线．那么 YP 的包络是一条抛物线，它的焦点是 S，在顶点处的切线是 AY．（命题 10 的逆．）

6. S 是定点，O 是定直线 OQ 上任一点，OQ' 与 OS 成定角 (α). 那么 OQ' 的包络是一条抛物线，它的焦点是 S，并且切 OQ 于定点 Q，使得 $\angle SQO=\alpha$.（本题是一般性质，上题是本题的特殊情形. 这是命题 13 的逆.）

7. OQ，OQ' 是两条定直线，S 是它们之间的一个定点，QQ' 满足 $\angle QSQ'=\pi-\angle QOQ'$. 那么 QQ' 的包络是一条抛物线，它的焦点是 S，并且与 OQ，OQ' 相切.（第 7 章抛物线性质 2 的逆.）

8. 切线三角形的垂心在准线上.（见第 8 章问题 14.）

圆 锥 曲 线

1. 设 P 点处的切线交准线于 Z，交正焦弦于 K. 那么 $SK:SZ=e$.（参考双曲线命题 10 的练习问题.）

2. AA' 是已知圆的一条定直径，S，S' 是到圆心等距离的点，SY，$S'Y'$ 是平行直线，交圆于 Y，Y'，那么 【206】

(1) 若 S，S' 在圆内，则 YY' 的包络是椭圆；

(2) 若 S，S' 在圆外，则 YY' 的包络是双曲线，它以已知圆为辅助圆.

或者，若 S，S' 是定点，SY，$S'Y'$ 是平行直线，使得 SY，$S'Y'=$ 常数，那么 YY' 的包络是椭圆或双曲线，随 SY，$S'Y'$ 在 SS' 同侧或异侧而定.（见椭圆命题 14 和双曲线命题 13.）

3. Cr，Cr' 是两条定直线，rr' 使 $\triangle Crr'$ 的面积为常数. 那么 rr' 的包络是一条双曲线，其渐近线为 Cr，Cr'.（见双曲线命题 31.）

4. 在三角形中，已知底边及两个底角的差，证明其顶点的轨迹是一条双曲线.

当差为直角时，轨迹是直角双曲线.（见问题 335.）

5. 一条定直线，与同焦圆锥曲线族中的一条相交于两点. 求证：在这些点的法线的交点的轨迹是一直线.（见问题 420.）

6. 一条已知直线对于一个同焦圆锥曲线系的极点的轨迹是一条直线.

设 AB 是已知直线;作同焦圆锥曲线,使它切 AB 于 P;作 $PG\perp AB$. AB 对于这条同焦圆锥曲线的极点是 P,即在 PG 上. 到任一其它同焦圆锥曲线作切线 PT, PT'. 那么 AB, PG 平分 $\angle SPS'$, $\therefore$ 它们平分 $\angle TPT'$,即 AB, PG 与 PT, PT' 调和分隔,因而关于以 PT、PT' 为切线的圆锥曲线是共轭的. $\therefore AB$ 对于这条圆锥曲线的极点在 PG 上.

7. 将圆锥曲线上任意一点与这曲线上四个定点相连,所得线束的反调和比是常数.(射影)

或者,考虑将准线看成横轴,把线束的顶点移到 S;那么根据命题 2,这个线束的各个角是常数,等于从 S 到各定点射线束诸角的一半.

8. 作出了圆锥曲线在四个定点的切线,一条其它切线与它们相交于四点,那么这共线四点的反调和比是常数.(互反)

9. 如果六边形内接于一条圆锥曲线,那么它的三双对边交点在一直线上.(巴斯加定理)

利用圆锥面射影,使两双对边平行,则正射影成为一个圆.

10. 如果六边形外切于一条圆锥曲线,那么它的三条对角
【207】线交于一点.(布列安桑定理)(互反)

11. 一个圆(圆心为 O)对于一点(S)的配极图形是一条圆锥曲线,它的一个焦点是 S,对应准线是 O 点的配极图形,并且离心率是 SO 与圆半径的比.

12. 有相同根轴的圆系,对于其极限点的配极图形是一个
【208】同焦圆锥曲线系.

附录B 蝴蝶问题的演变①

L·班可夫(Leon Bankoff)

美国《数学杂志》编者按:本文通过实例说明,处理一个单独问题所能用的几何技巧,是那样的丰富多采.推动作者查阅大量历史资料的原因,是由于中国福建省福州市福建师范大学 Kaidy Tan 提供了蝴蝶问题多种证法汇编.这些证法都已出现在印刷品中,本文介绍其中许多证明的要点,并且揭示它们的历史根源.

在欧氏几何园地里,有一棵生机勃勃的常青树,叫做蝴蝶问题.一位不知名的诗人数学家发现这个问题的图形像昆虫的翅膀,想象出如此美妙的名称.这个名称首次出现,是在《美国数学月刊》1944 年 2 月号[1]发表的问题解答中作为标题.随后这名称被保持下来,并且或许在某种程度上帮助了这个问题在最近的流行.我对蝴蝶问题的喜爱,开始于三十年前《中学数理》(School Science and Mathematics)刊物中的一个征解问题:

在圆(O)中,P 是弦 AB 的中点.弦 RS 和 TV 通过点 P. RV

① 译者注:原载美国《Mathematics Magazine》,第 60 卷第 4 期(1987 年 10 月),第 195—210 页.这是一份新近的圆锥曲线几何性质珍贵资料,现将它译出,附于中译本的最后,作为对原书内容的补充.

交 AP 于点 M，ST 交 PB 于点 N. 利用中学几何，证明 MP 等于 PN.

我被这道题迷住了. 在那显而易见随随便便的图形中，居然出现意外的对称，深深地吸引了我，翻遍我的丰富藏书，在 1815 年的《先生日记》(Gentleman's Diary，又译为《男士日记》)[2]中，找到这道题的两种解法. 这是一种英国的出版物，在 18 世纪和 19 世纪对于数学传播发挥过建设性作用. 我惊喜地发现，其中一位解答者是霍纳(W.G.Horner，以霍纳法著名)，他对这个问题深思熟虑，提出了一种解法. 我把他的结果浓缩后，连同我的一起寄出，发表在《中学数理》杂志上[3]. 在与我的良师益友特里格(Charles W. Trigg)讨论这个问题时，我很幸运，得到了更多的《中学数理》参考资料. 连同前面提到的《美国数学月刊》资料，再加上约翰逊(Johnson)的《近代欧氏几何学》[4]书中的一处. 我感到惊奇，因为从这些来源中，找到了各种各样新奇巧妙的解法——有利用笛沙格对合定理的，有利用交比的，还有利用梅涅劳斯定理的，用解析几何的，三角的，近代欧氏几何的，以及利用各种其他方式的，这些都将在下文详细交待.

在此，我愿提供蝴蝶定理的一些不同处理模式的样品，并且追溯它的历史足迹，介绍它的推广和最新变化. 我打算详细介绍索韦(Léo Sauvé)对这问题的具有广泛影响的处理，他是加拿大杂志《数学难题》(Crux Mathematicorum)的编辑，1976 年他在这家杂志上发表综述文章[5]时，刊名叫做《Eureka》①. 我的调查

① 译者注：Eureka 意为"我找到了"，是一句科学名言. 据传，阿基米德(公元前 287—前 212 年)奉命为叙拉古国王鉴定，一顶纯金王冠有没有被金匠在制造时偷金换银. 阿基米德无计可施，苦闷中，去公共浴室洗澡，入水后感受浮力作用，触发灵机，想到可借助浮力，利用金银比重不同，在保持王冠完整的前提下，测出王冠的含金量. 阿基米德大喜，顾不得穿衣，赶紧赤身奔回家中准备试验，一路口中不断欢呼：Eureka！Eureka！

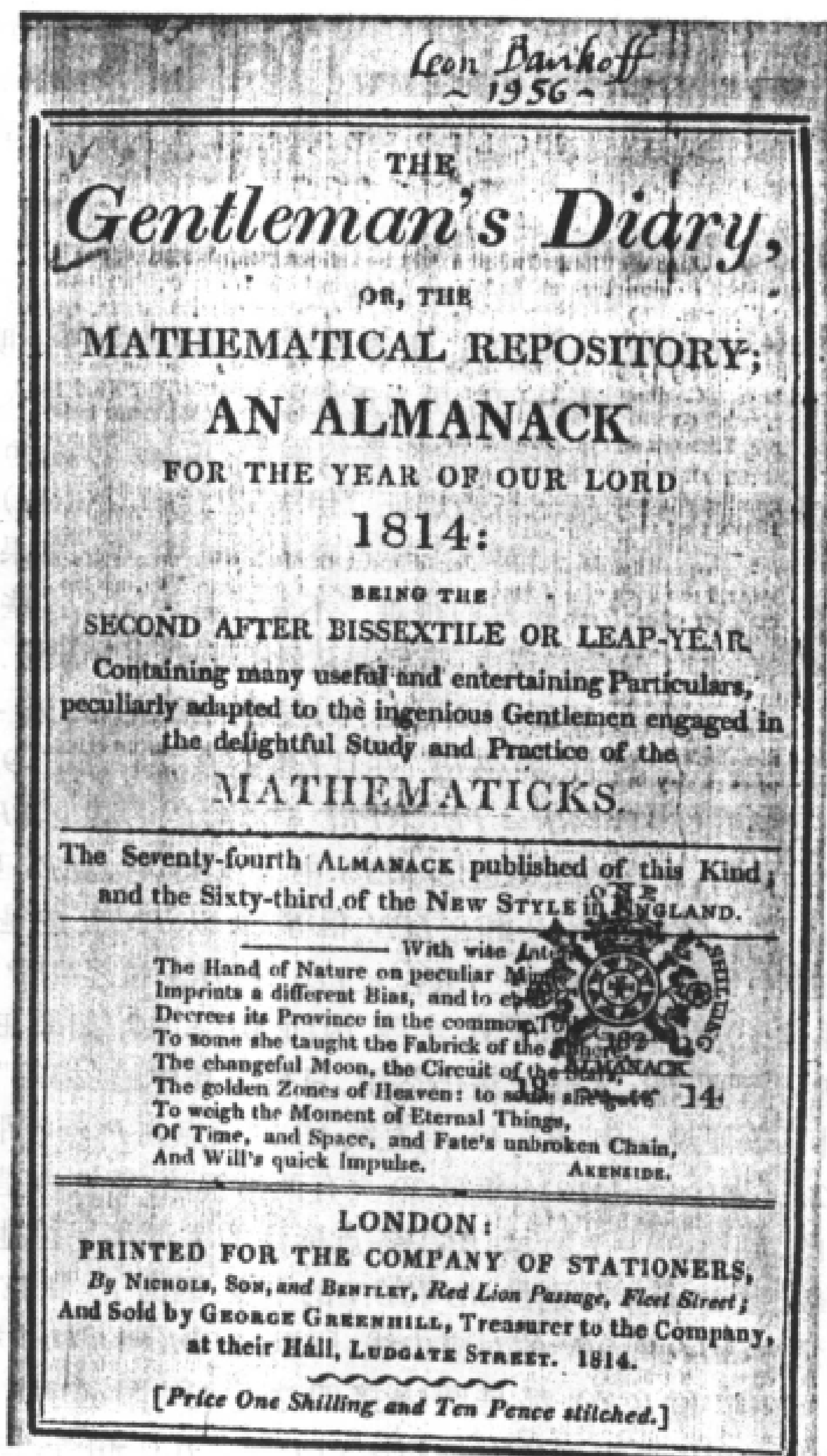
虽是零星的，但都是 1944 年以前的资料，当时问题无名，查找难度更大．我不去尝试更加系统的整理，宁愿或多或少地根据发现年代的顺序介绍它们．这种无拘无束、趣闻逸事的处理方式，可使读者参与我的行程，从悠闲的好奇，通往满意的启示．

初等几何解法

有人以为，蝴蝶问题最简单的解法，应该是利用中学几何．确实，一个初学欧氏几何的人，更容易接受和理解初等证明．但是后面将会看到，射影几何学更为近代的技巧，提供了令人愉快的捷径．《近代欧氏几何学》的作者约翰逊（Roger Johnson）说，“这个貌似简单的定理出奇地难证．”伊夫斯（Howard Eves）在他的书《几何学基础》[6]中对以上观点表示赞同，写道，“如果只许利用中学几何，这个问题真的很难．”不管你是否同意这些评价意见，看来，为了教学的理由，最好是从欧几里得水平开始．

1．《中学数理》1955 年 2 月号[3]发表的解法（图 9B－1），首先作一条平行于 AB 的弦 RL，并且连结 LP，LN，如图 9B－1 所示．于是我们得到 $RP = PL$，$\angle PRL = \angle RLP$，以及 $\angle RPM = \angle LPN$．进而，在圆内接四边形 $RLTS$ 中，$\angle LRS$ 与 $\angle LTS$ 互补，并且由于 $\angle LRS$，$\angle RLP$ 和 $\angle LPN$ 相等，所以 $PNTL$ 也是圆内接四边形．因此，$\angle PLN$，$\angle PTN$，$\angle VTS$，$\angle VRS$ 和 $\angle MRP$ 都相等，并且三角形 MPR 和 PNL 全等，因而 $MP = PN$．如果在图中弧 AR 小于弧 TB，上述证法仍适用，只需将其中的“相等”换成“互补”．顺便说一句，RT，VS 与直线 AB 的交点到 P 点等距离．

2．《先生日记》1815 年第 39 页有两种解法．解法一是霍纳提出的，如图 9B－2 所示，图中各点标注的字母都保持他原解的面貌．设 D 和 E 分别是 ML 和 ON 的中点．因为 ID 和 IE 是相似三角形 MLI 和 OIN 的对应中线，所以 $\angle PDI$ 和 $\angle QEI$ 相等．现在 $DCIP$ 和 $ICEQ$ 都是圆内接四边形，因而 $\angle QEI$ 等于 $\angle ICQ$，$\angle PDI$ 等于 $\angle PCI$．所以 $\angle PCI$ 与 $\angle ICQ$ 相等．由此得到直角三角形 ICP 与 ICQ 全等，因而 $IP = IQ$．


Leon Bankoff
~ 1956 ~

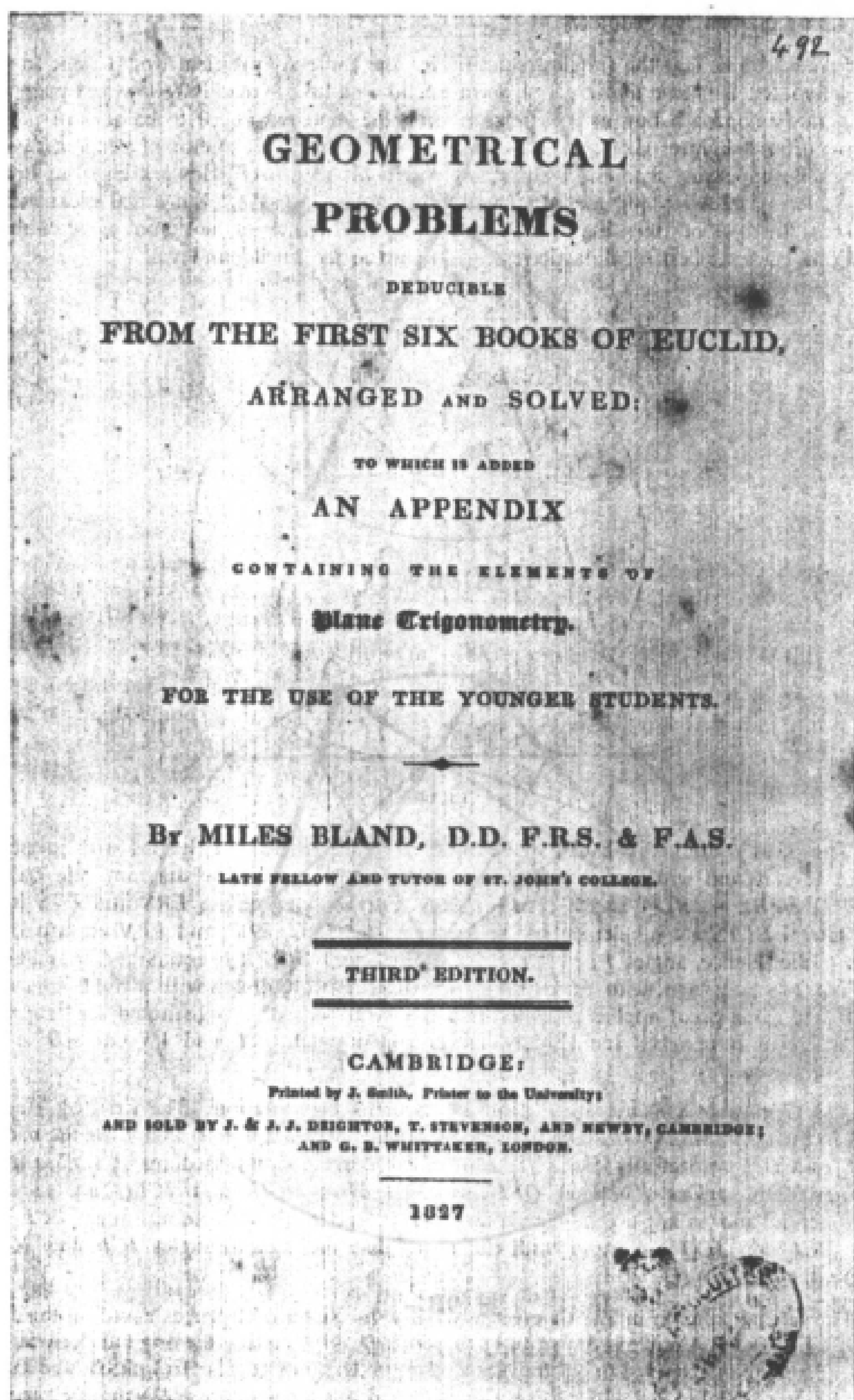
THE
Gentleman's Diary,
OR, THE
MATHEMATICAL REPOSITORY;
AN ALMANACK
FOR THE YEAR OF OUR LORD
1814:
BEING THE
SECOND AFTER BISSEXTILE OR LEAP-YEAR.
Containing many useful and entertaining Particulars, peculiarly adapted to the ingenious Gentlemen engaged in the delightful Study and Practice of the
MATHEMATICKS.

The Seventy-fourth ALMANACK published of this Kind; and the Sixty-third of the NEW STYLE in ENGLAND.

———— With wise Inte...
The Hand of Nature on peculiar Minds
Imprints a different Bias, and to each
Decrees its Province in the common Toil.
To some she taught the Fabrick of the Sphere,
The changeful Moon, the Circuit of the Stars,
The golden Zones of Heaven: to some she gave
To weigh the Moment of Eternal Things,
Of Time, and Space, and Fate's unbroken Chain,
And Will's quick Impulse. AKENSIDE.

LONDON:
PRINTED FOR THE COMPANY OF STATIONERS,
By NICHOLS, SON, and BENTLEY, Red Lion Passage, Fleet Street;
And Sold by GEORGE GREENHILL, Treasurer to the Company, at their Hall, LUDGATE STREET. 1814.
[*Price One Shilling and Ten Pence stitched.*]

图 9B－a 《先生日记》封面.



492

GEOMETRICAL
PROBLEMS

DEDUCIBLE

FROM THE FIRST SIX BOOKS OF EUCLID,

ARRANGED AND SOLVED:

TO WHICH IS ADDED

AN APPENDIX

CONTAINING THE ELEMENTS OF

Plane Trigonometry.

FOR THE USE OF THE YOUNGER STUDENTS.

BY MILES BLAND, D.D. F.R.S. & F.A.S.

LATE FELLOW AND TUTOR OF ST. JOHN'S COLLEGE.

THIRD EDITION.

CAMBRIDGE:
Printed by J. Smith, Printer to the University;
AND SOLD BY J. & J. J. DEIGHTON, T. STEVENSON, AND NEWBY, CAMBRIDGE;
AND G. B. WHITTAKER, LONDON.

1827

图 9B－b 《几何问题》封面.

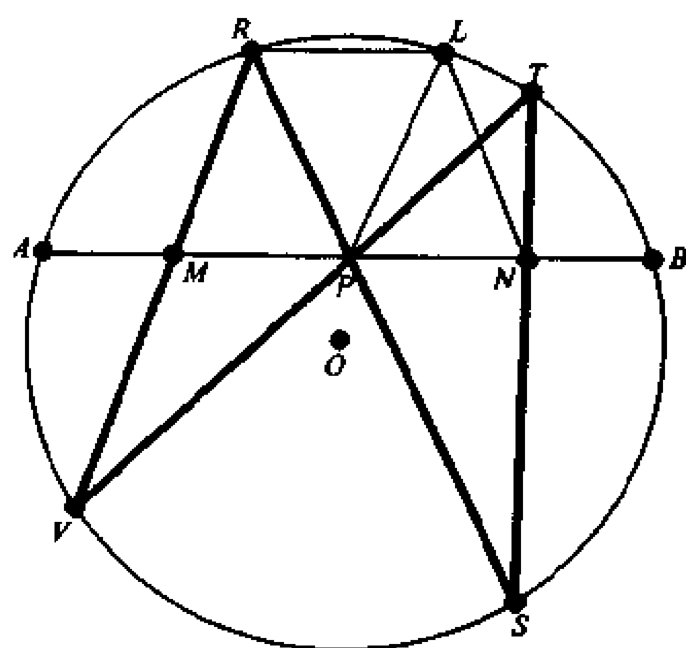


图 9B－1

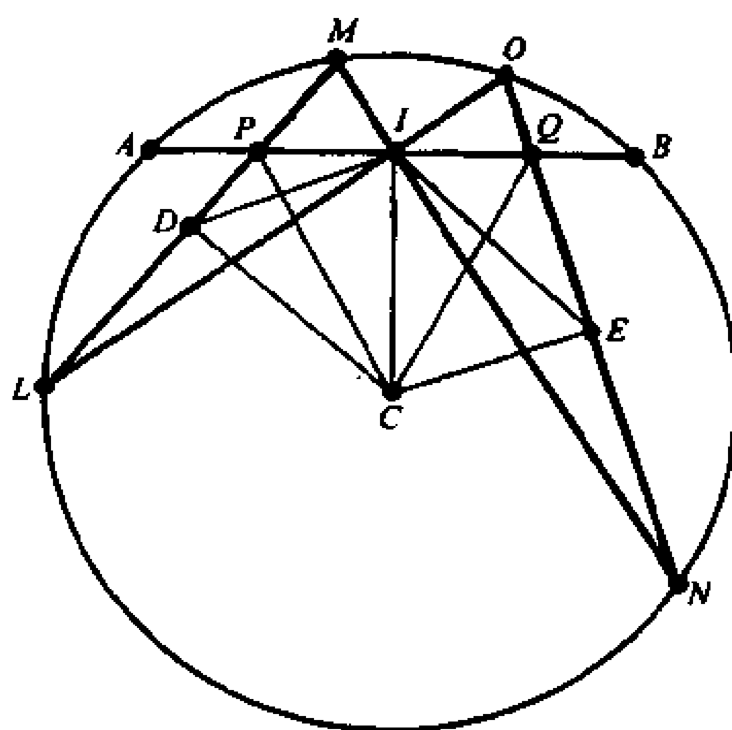


图 9B－2

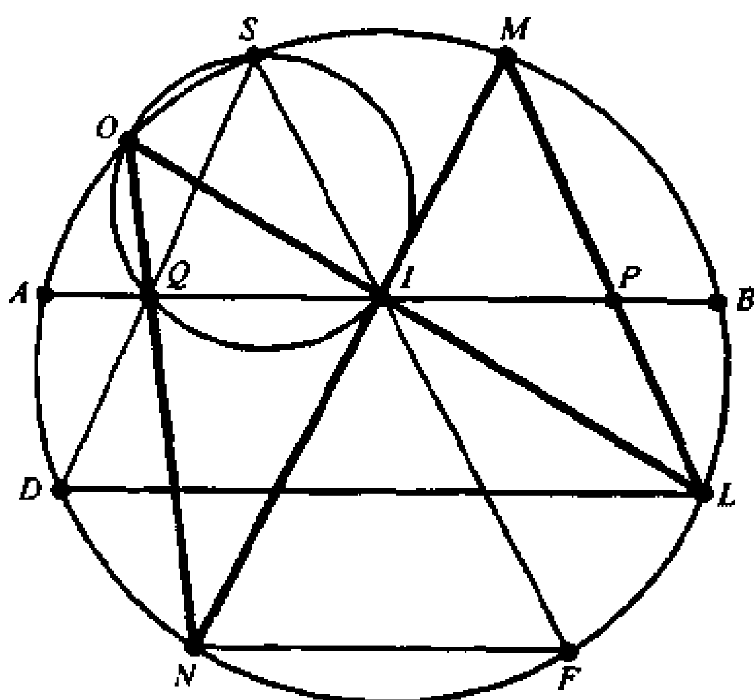


图 9B－3

3.《先生日记》的第二种解法，解答者是泰勒(Richard Taylor)，如图 9B－3. 过点 Q，O，I 作圆，与原圆相交于 O 和 S. 然后延长 SQ，交较大的圆于 D. 因为 $\angle OIQ$，$\angle OSD$ 和 $\angle OLD$ 相等，所以 DL 平行于 AB. 因为 $\angle O$ 等于 $\angle S$，所以弧 $NL=$ 弧 DF，因而 NF 平行于 DL 和 AB. 由于 I 在 NF 的垂直平分线上，得到 $IN=IF$. 再利用 $\angle SNM=\angle SFM$ 和 $\angle SIN=\angle MIE$，知道三角形 SNI 和 MFI 全等，由此得 $IS=IM$. 最后，在全等三角形 ISQ 和 IPM 中，$QI=IP$，所以 $QA=PB$、$AP=BQ$. 这种解法也适用于 P 和 Q 落在圆外的情形. 在后面这种情形下的证明见《教育时代》(Educational Times)，问题 1549[7]和[8].

4. 蝴蝶问题的一种早期解法，见于另一本罕有的书:《几何问题》，作者是布兰德(Miles Bland)[9]. 在图 9B－4 中，C 是 AB 的中点，I，H 分别是 GD，FE 与 AB 的交点. 作 KHL 平行于 DG，交 DF 于 K，交 GE(延长线)于 L. 因为 $\angle HLE$，$\angle CGI$ 和 $\angle HFK$ 相等，所以三角形 LEH 和 HKF 对应角相等，因而 $\frac{LH}{HE}=\frac{HF}{HK}$. 所以

$$HE \cdot HF = LH \cdot HK = AH \cdot HB$$
$$= (AC + CH)(AC - CH).$$

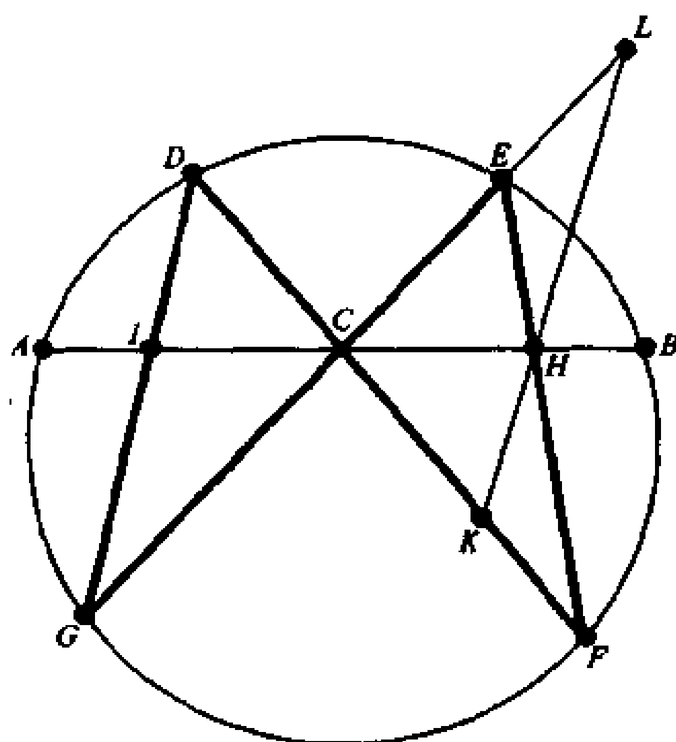


图 9B－4

类似地，三角形 CID 和 CHK 对应角也相等，三角形 CHL 和 CIG 同样如此，所以

$$\frac{KH}{HC} = \frac{DI}{IC}, \quad \frac{LH}{HC} = \frac{GI}{IC}.$$

因而

$$\frac{KH \cdot LH}{HC^2} = \frac{DI \cdot IC}{IC^2}.$$

但是 $KH \cdot LH = AC^2 - HC^2$，$DI \cdot IC = AC^2 - IC^2$，所以

$$\frac{AC^2}{HC^2} = \frac{AC^2}{IC^2}, \quad \text{因而} \quad HC = IC.$$

除去记号稍有改动而外，布克（W. E. Buker）也提出同样的解法，见《美国数学月刊》1944 年 2 月号[1]，问题 E571 解法 2；

又见考克塞特和格雷策《几何学的新探索》[10].

图 9B－5

图 9B－6

5. 罗森鲍姆(Joseph Rosenbaum)的解(如图 9B－5),和上面例 4 中布克的解发表在《美国数学月刊》的同一期. 他将 DF 对于通过 O 点的直径进行反射,得到 $D'F'$,因而 O, G, C, F' 共圆,其中 G, H 是 CE, DF 与 AB 的交点. 罗森鲍姆证明时利用了"有向角",见约翰逊[4],第 11—15 页. 这是一个有用而精致的概念,不过可能难以理解. 为简单起见,我把他的解答意译出来,使得每个熟悉欧几里得《几何原本》前三卷的人都容易看懂.

利用对顶角和对称性,知道 $\angle EOB$, $\angle FOA$ 和 $\angle BOF'$ 相等. 易知 $\angle ECF'$, $\angle EFF'$ 和 $\angle EOB$ 相等;所以

$$\angle ECF' = \angle BOF' (= \angle GOF).$$

由此推出 O, G, C, F' 共圆,因而 $\angle OF'G$, $\angle OCG$, $\angle DCE$, $\angle DFO$ 和 $\angle OF'D'$ 相等. 所以 G 在 $D'F'$ 上,即 G 是 H 的反射像.

6. 查洛士(Mannis Charosh)[11]提出一种有趣的处理方法,立足于一种较为近代的观念,涉及根轴. 如图 9B－6,其中各字母含义观图自明,先[在 AB 上]确定 C',使 $MC' = MD$,然后证明 PS 通过 C',于是 C 与 C' 重合. 为此,设 $MT = MR$, $MU = MQ$. 那么利用全等三角形 TUM 和 MQR,知道相似三角形 $C'UM$ 和 DQM 也是全等的[这里 C' 是 UT 与 AB 的交点],因而 $MC' = MD$. 因为 $\angle S$, $\angle Q$ 和 $\angle U$ 相等,所以 $PUST$ 是圆内接四边形,其外接圆设为 O'. 在已知圆(O)中,点 A, R, B, Q 共圆,所以 A, R, B, Q 的对称点 B, T, A, U 共圆. 设此圆为 O''. 现在,熟知三个圆(O),(O')和(O'')的根轴 AB, UT 和 PS 交于一点. 最后,因为 AB 与 UT 相交于 C',所以 PS 通过 C'[因而 C' 与 C 重合]. 因而 $CM = MD$.

查洛士还有一个类似的解法,也涉及三个根轴的交点,发表在[12]中.

倘若将这许多形形色色的欧几里得证法统统走遍,恐怕会冗长乏味,徒劳无功. 只需再举一例,就足以说明在文末所附参

考资料中反复遇见的解法基本原理.

7. 艾尔伯格(Eilberg)发表在《中学数理》1955 年 1 月号[13]中的解,一开始先作弦 TY 平行于 AB(图 9B-7). $\angle PYR$(等于 $\angle PYT$ 与 $\angle TYR$ 的和)用弧 $AV+BT+TR$ 的一半来度量. $\angle PMR$ 也用同样的弧组合度量. 所以 $\angle PMR$ 与 $\angle PYR$ 相等,因而四边形 $MPRY$ 内接于圆. 故得 $\angle NTP=\angle MRP=\angle MYP$. 从而三角形 PYM 与 PTN 全等,理由是 ASA,因为 $PY=PT$, $\angle APY=\angle NPT$. 于是得到 PM 和 PN 相等.

一个人在寻找蝴蝶问题新解法时,很可能会重演上述基本程式:将原图中的某个元素进行反射,得到一个有用的圆内接四边形,最后得到两个全等三角形,在它们的边里含有需要证明相等的线段. 包含从这基本模式导出的类似解答过程的资料,见[14],[15],[16],[17],[18],[19]和[20].

蝴蝶问题的一些有趣变化,可在下列常见资料中找到:[5],[21],[22],[23],[24],[25]和[26].

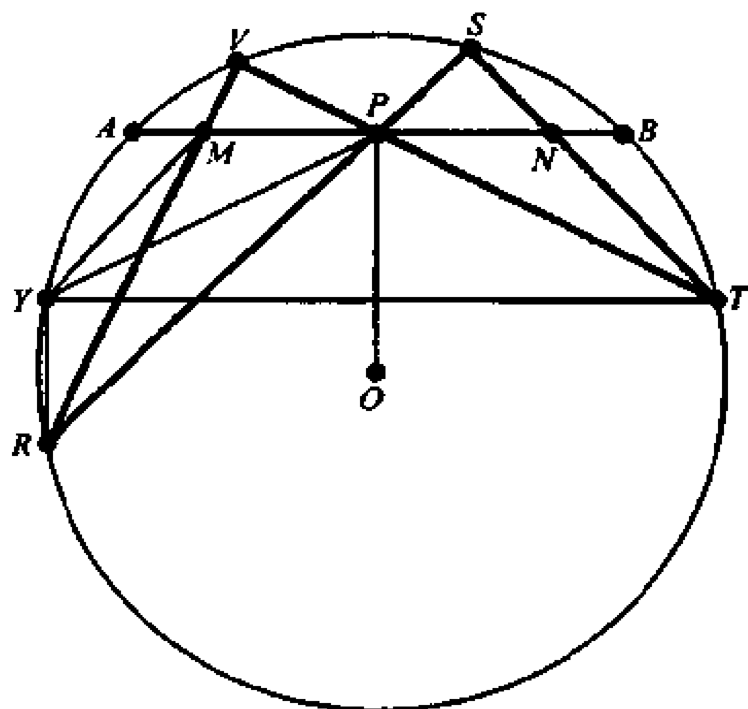


图 9B-7

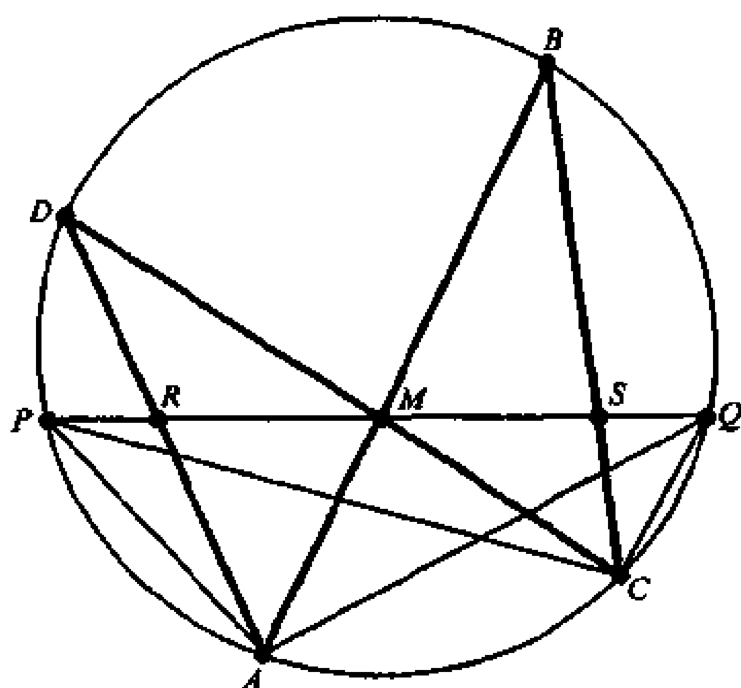


图 9B－8

三角解法

米勒(Miller)的《学院几何》[27]中所用的处理方法，组合应用三角学和交比，又称非调和比或二重比．如图 9B－8，交比定义为

$$(PRMQ)=\frac{PM}{MR}\div\frac{PQ}{QR}.$$

但是

$$\frac{PM}{MR}=\frac{PM}{AM}\div\frac{MR}{AM}=\frac{\sin\angle PAM}{\sin\angle MPA}\div\frac{\sin\angle RAM}{\sin\angle MRA}.$$

对于$\frac{PQ}{QR}$，得到类似的商，因而[代入交比定义式，得到]

$$(PRMQ)=\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle BAD}\div\frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle QAD}.$$

同理可得

$$(PMSQ)=\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle BCD}\div\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle QCD}.$$

因为同弧上的圆周角相等，有$(PRMQ)=(PMSQ)$，因而

$$\frac{PM}{MR}\cdot\frac{QR}{PQ}=\frac{PS}{SM}\cdot\frac{QM}{PQ}.$$

由于 $PM=MQ$，推出 $RQ\cdot MS=PS\cdot RM$，后者可化为

$$RM\cdot MS+MQ\cdot MS=PM\cdot RM+MS\cdot RM,$$

即 $MQ\cdot MS=PM\cdot RM$. 因为 $MQ=PM$，所以 $MS=RM$.

这个解法也出现在琼斯(Dixon Jones)的文章《二重蝴蝶定理》[25]中.①

解析几何解法

一种漫不经心使用笛卡儿威力强大的解析几何的方式，是选取直角坐标系，使圆的第一条弦在 x 轴上，通过此弦中点的直径在 y 轴上. 有人可能会写出圆的方程，然后求出过原点的弦在何处与圆相交. 再利用交点连线的方程，求出连线与 x 轴的交点. 在一番略显困难的巧妙处理之后，证出所得 x 轴上两个交点到原点等距离.(这是一种麻烦办法，只推荐给具有自我虐待倾向的数学家.)

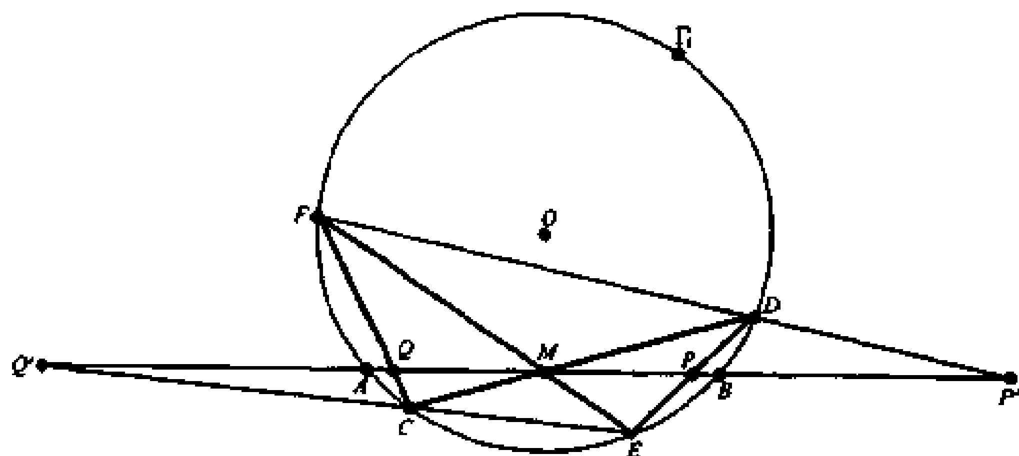


图 9B-9

① 译者注：蝴蝶问题的三角证法也可以不用交比的概念和性质，而只需简单地利用正弦定理、圆周角、对顶角和相交弦定理，见蒋声，《初中几何妙题巧解》，上海科技教育出版社 1989 年 10 月第一版，第 150 页.

有一种合理应用解析几何的方法，见于萨蒂亚纳拉亚纳(K.Satyanarayana)的文章《蝴蝶问题的一种简单证法》[28].这位作者选取的坐标系仍如上述，但是引进了退化圆锥曲线概念，不但证明了经典的关于圆的蝴蝶定理，而且证明了对于常态圆锥曲线的推广定理.他的工作发表在《数学难题》上，简明而严密，无需压缩，全文转载如下(承蒙编辑索韦慷慨同意).(如图 9B－9 和 9B－9a.)

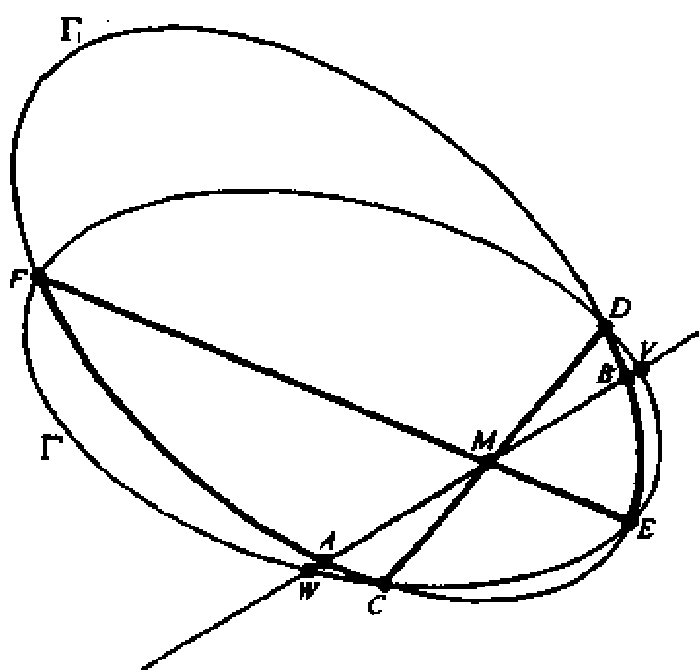


图 9B－9a

"蝴蝶问题 通过圆的弦 AB 的中点 M 作另外两条弦 CD 和 EF，再作 ED 和 CF，分别交 AB 于 P 和 Q.证明 $PM = MQ$.

证明 设 Γ_1 是已知圆.我们引进直角坐标系，使原点为 M，x 轴为 AB，y 轴为 MO，其中 $O(0,\mathrm{d})$是圆心.设圆半径为 r，则其方程为

$$\sum_1 \equiv x^2 + (y - d)^2 - r^2 = 0.$$

直线 CD 和 EF 通过原点，它们组成一条退化圆锥曲线 Γ_2，其方程形如

$$\sum_2 = ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$$

现在对于任意 k, l,

$$\sum = k\sum_1 + l\sum_2 = 0$$

表示一条圆锥曲线 Γ,它通过 Γ_1 和 Γ_2 的交点,即通过 C, D, E, F;并且每条通过 C, D, E, F 的圆锥曲线都能表示成这种形式.

设圆锥曲线 $\sum = 0$ 交 AB 于 V 和 W. AB 的方程是 $y = 0$,并且

$$\sum_1(x,0) = x^2 + d^2 - r^2, \quad \sum_2(x,0) = ax^2.$$

所以 V 和 W 的横坐标是方程 $\sum(x,0) = 0$ 的根,即下述方程的根:

$$k(x^2 + d^2 - r^2) + lax^2 = 0.$$

因为这个方程不含一次项,其两根之和为 0,所以 $\overline{MV} + \overline{MW} = 0$,因而

$$VM = MW. \tag{1}$$

(1)式对所有通过 C, D, E, F 的圆锥曲线都成立,而一对直线 ED、CF 是这样一条圆锥曲线,所以从(1)式推出 $PM = MQ$.□

一对直线 CE, DF 也组成一条通过 C, D, E, F 的圆锥曲线.如果这两条直线交 AB 于 P' 和 Q',如图 9B-9 所示,那么从(1)式也推出 $P'M = MQ'$.

设 Γ_1 不是圆,而是换成一条任意的常态圆锥曲线,其方程为

$$\sum_1 = Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0.$$

其余记号同上.我们有

$$\sum(x,0) = k(Ax^2 + 2Gx + C) + lax^2.$$

设 A 和 B 的坐标分别是 $(-\alpha, 0)$ 和 $(\alpha, 0)$,那么 $\sum_1(-\alpha,0) = \sum_1(\alpha,0) = 0$ 蕴涵着 $G = 0$;所以方程 $\sum(x,0) = 0$ 不含一次项,证明的剩余部分同上.于是我们证明了:

广义蝴蝶问题 通过常态圆锥曲线 Γ_1 的弦 AB 的中点 M

作另外两条弦 CD 和 EF. 过 C, D, E, F 作一条圆锥曲线 Γ,交 AB 于 V 和 W. 证明 $VM = MW$."

这个问题的图形如图 9B－9a. 一种利用射影几何的证法可在伊夫斯[38]的第 6 章中找到.

利用截线理论的解法

1919 年,《中学数理》发表了一种应用梅涅劳斯定理的解法

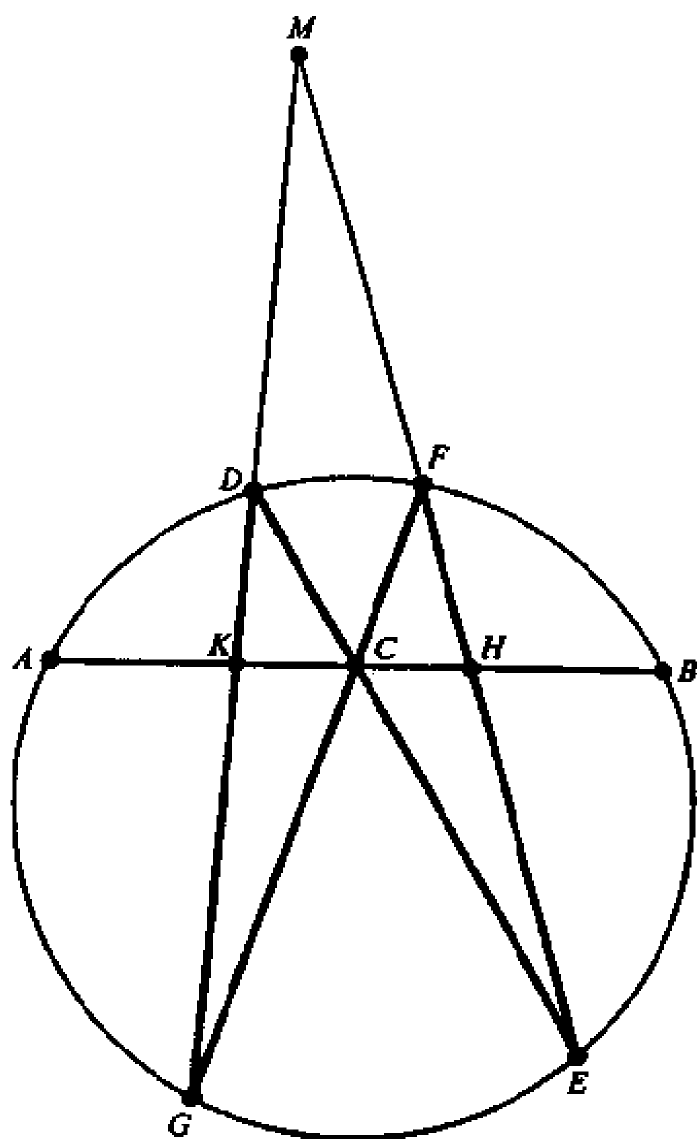


图 9B－10

[29]. 如图 9B－10，考虑三角形 HMK，被直线 FG 和 DE 所截. 从关系式

$$\frac{CH}{CK}\cdot\frac{GK}{GM}\cdot\frac{FM}{FH}=1,\quad \frac{CH}{CK}\cdot\frac{DK}{DM}\cdot\frac{EM}{EH}=1,$$

我们得到

$$\frac{CH^2\cdot GK\cdot DK\cdot FM\cdot EM}{CK^2\cdot FH\cdot EH\cdot GM\cdot DM}=1.$$

但是 $FM\cdot EM=GM\cdot DM$，所以

$$\begin{aligned}\frac{CH^2}{CK^2}&=\frac{FH\cdot EH}{GK\cdot DK}=\frac{AH\cdot BH}{AK\cdot BK}\\&=\frac{(AC+CH)(AC-CH)}{(AC+CK)(AC-CK)}=\frac{AC^2-CH^2}{AC^2-CK^2}\\&=1,\end{aligned}$$

由此易得 $CH=CK$.

这个解法与 1907 年发表在法文《几何练习》[30]中的相同.

利用笛沙格对合定理的解法

利用对合解蝴蝶问题，是射影几何的有效性和简洁性的一个极好的例子. 我们知道，对合是一种射影，其周期为 2，就是使点成对互换. 笛沙格发现了一个关于对合的重要定理，说的是：*任一条直线(不是切线)与一条圆锥曲线及其内接四边形的对边相交所得各个点对在同一对合中.* 特别地，对于一个圆内接四边形，[把它看成完全四角形，]一条直线与这完全四角形三双对边的交点，以及与外接圆的交点，是同一对合中的四个点对. (关于笛沙格的圆锥曲线对合定理的讨论和证明，可参考编号为[38]至[47]的任一资料.)

《中学数理》1919 年 3 月号[29]发表了下面的解法，解答者是加拿大蒙特利尔的菲洛马斯(Philomathe)：

AB 是已知圆中的弦，被 C 点平分. DE 和 FG 是任意两条相交于 C 的弦；FE 交 AB 于 H，DG 交 AB 于 K. 证明 $CH=CK$ (图 9B－10).



PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
COLLECTIONES
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE

In Latinum conuersæ, & Commentarijs illustratæ.

In hac nostra editione ab innumeris, quibus scatebant mendis, & præcipuè in Græco contextu diligenter vindicatæ.

ET SERENISSIMO PRINCIPI
LEOPOLDO GVLIELMO
ARCHIDVCI AVSTRIAE, &c.
DICATAE.

BONONIÆ Ex Typographia HH. de Duccijs. M.DC.LX.

SVPERIORVM PERMISSV.

图 9B－c　帕普斯选集封面.

考虑圆内接四边形 $FDGE$ 和它的对角线 FG，DE．根据笛沙格对合定理，我们有

$$\frac{AH \cdot AK}{AC \cdot AC} = \frac{BH \cdot BK}{BC \cdot BC}.$$

所以 $AH \cdot AK = BH \cdot BK$，即

$$\frac{AH}{BK} = \frac{BH}{AK} = \frac{AH + BH}{BK + AK} = 1.$$

由此得 $AH = BK$，因而 $CH = CK$．

在[30]中提出一种几乎完全相同的解法．我们的有关概念，如对合、交比不变、极点和极线，互反性，透视，以及无数的推论，都可追溯到笛沙格．有理由认为，我们的蝴蝶问题最新版本，是笛沙格关于圆锥曲线的工作的拓广，而不是来自其他途径．按照库里奇(Coolidge)[31]，那本书里甚至更确认笛沙格的许多观念应该归功于帕普斯(Pappus)[32]．我的一位杰出同事评论说，蝴蝶定理的胚胎开始于帕普斯，然后成为毛毛虫，以蜗牛速度缓慢爬行，直到幼虫入壳于17世纪笛沙格时代．继而蛹在茧中静眠，两个世纪以后，由于沙勒(Chasles)和另外一些射影几何学家，才长成了蝴蝶．

射影几何方法卓有成效的另一个戏剧性的例子，将在下一节中介绍．

利用交比的解法

凯西(John Casey)的《欧几里得续集》[33]包含蝴蝶问题的一种优美处理如下．

通过圆的弦 AB 的中点 O 作另外两条弦 CE 和 DF，直线 ED 和 CF 连结它们的端点，交 AB 于 G 和 H，那么 $OG = OH$．

解　线束[的交比]$(E \cdot ADCB) = (F \cdot ADCB)$．所以点列 A，G，O，B 的交比等于点列 A，O，H，B 的交比．又因为 $AO = OB$，所以 $OG = OH$．

以上解法是凯西的表达方式．如果采用更熟悉的记号，线束

的顶点应该写在括号的外面.

在上文中已经明白了交比的原理,所以现在应用它们时无需推导,正如每次在解题中出现勾股定理时不必重复证明一样.因而我们有了一条关于交比的现成捷径,可供多次应用.

一个值得注意的定理

约翰逊的书《近代欧氏几何学》[4]中的一个足注,使人们注意到坎迪(A. Kandy)发表在1896年《数学纪要》中的一篇重要论文[34].由于原始论文比较难懂,这里将其中有关我们的蝴蝶问题主题的材料改述成容易理解的形式.

在圆的弦 AB 上任取一点 O,过 O 作弦 CD 和 EF.弦 CF 和 ED 分别交 AB 于 G 和 H(图 9B-11).

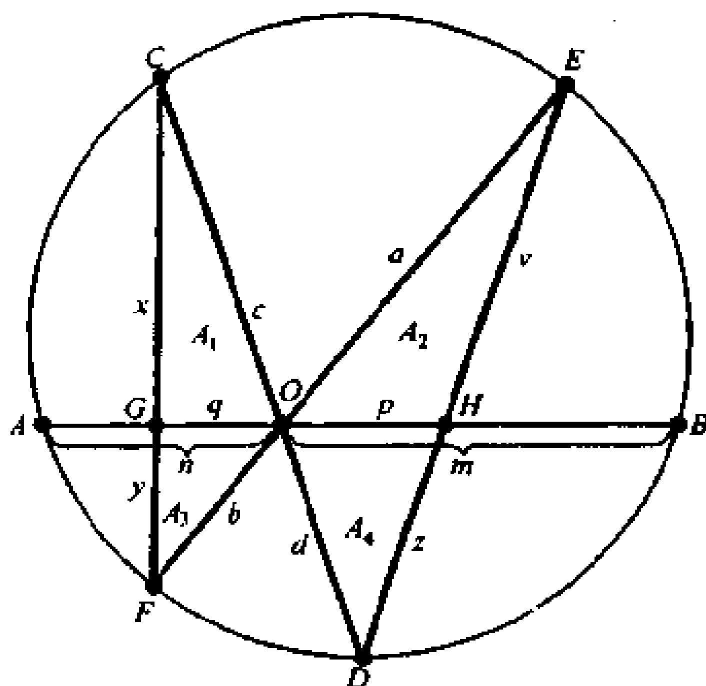


图 9B-11

设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示三角形 CGO, EOH, GOF 和 ODH 的面积.

又设 $OB=m$，$OA=n$，$OH=p$，$OG=q$，$OE=a$，$OF=b$，$OC=c$，$OD=d$，$CG=x$，$GF=y$，$EH=v$，$HD=z$.

那么由于$\angle C=\angle E$，$\angle F=\angle D$，等等，得到

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{cx}{av},\quad \frac{A_3}{A_4}=\frac{by}{dz},$$

$$\frac{A_1}{A_4}=\frac{cq}{dp},\quad \frac{A_3}{A_2}=\frac{bq}{ap}.$$

由此得

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4}=\frac{bcq^2}{adp^2}=\frac{bcxy}{advz},$$

因而

$$\frac{q^2}{p^2}=\frac{xy}{vz}=\frac{AG\cdot GB}{AH\cdot HB}=\frac{(n-p)(m+q)}{(n+p)(m-q)}$$

$$=\frac{mn-q(m-n)-q^2}{mn-p(m-n)-p^2}.$$

由此得

$$mn(p-q)=pq(m-n), \qquad (1)$$

所以

$$\frac{mn}{pq}=\frac{m-n}{p-q},$$

上式可改写成

$$\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}. \qquad (2)$$

因此，[直线 AB]夹在圆内和夹在两弦之间[被 O 点分成]的线段乘积，与它们的差(或和)成比例.

蝴蝶定理是上述美妙一般结果的一个简单推论，因为在坎迪定理的命题中，点 O 可以取为AB 的中点. 这时 $m-n=0$，从(1)式得 $mn(p-q)=0$. 于是从 $mn\neq 0$，得 $p=q$.

坎迪的论文还讨论了另外一些与本文无关的情形. 这里写出的对于经典蝴蝶问题特殊情形的解，在[35]中再次露面，并且

被[5]转载.

用(2)式表达的结果,对于解"三翅蝴蝶问题"特别有用,这个问题是卢瑟(R.S.Luthar)在美国《数学杂志》1984 年 3 月号提出的,在 1985 年 3 月号中发表了两种解法[36].道(Jordi Dou)的解沿用凯西《欧几里得续集》的交比方法(如前所述),第二种解法是蒂比里奥(Tiberio)的,利用了哈鲁基(Haruki)引理,取自洪斯伯格(Honsberger)的文章[14]的一部分.哈鲁基引理是我们下一节的话题.卢瑟提出的问题如下:

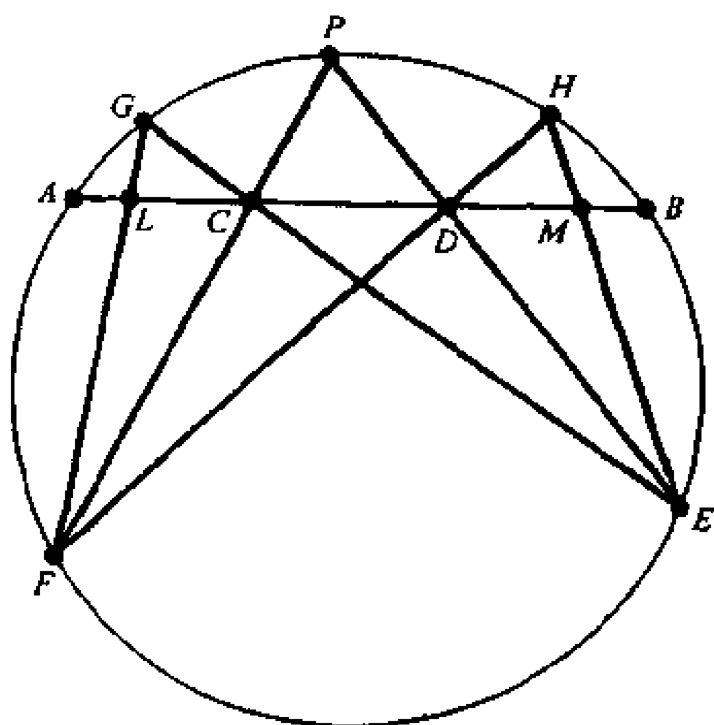


图 9B-12

设圆 O 的弦 AB 在点 C 和 D 三等分.设 P 是圆上不同于 A 和 B 的任一点.延长直线 PD 和 PC,分别交圆于 E 和 F.延长直线 EC 和 FD,分别交圆于 G 和 H.设 GF 和 HE 分别交 AB 于 L 和 M.证明 $AL=BM$(图 9B-12).

利用坎迪定理证明中的记号和关系,我们设 $AC=n=1$,

$CB=m=2$，$CD=p=1$，那么 $LC=q=\frac{2}{3}$.对于折四边形 $PFHE$ 如法炮制，得到 $DM=\frac{2}{3}$. 又因为 $AC=DB$，所以 $AL=MB$.

哈鲁基引理

哈鲁基引理见[14]，内容为：设 AB 和 FD 是圆中不相交的弦，并设以 A 和 B 为端点且不含 F 和 D 的弧 AB 上有一动点 P，那么对于 P 的每个位置，直线 PF 和 PD 交 AB 所得三条线段的长度 x,y,z，总是使得 $\frac{xz}{y}$ 为常数(图 9B－13).

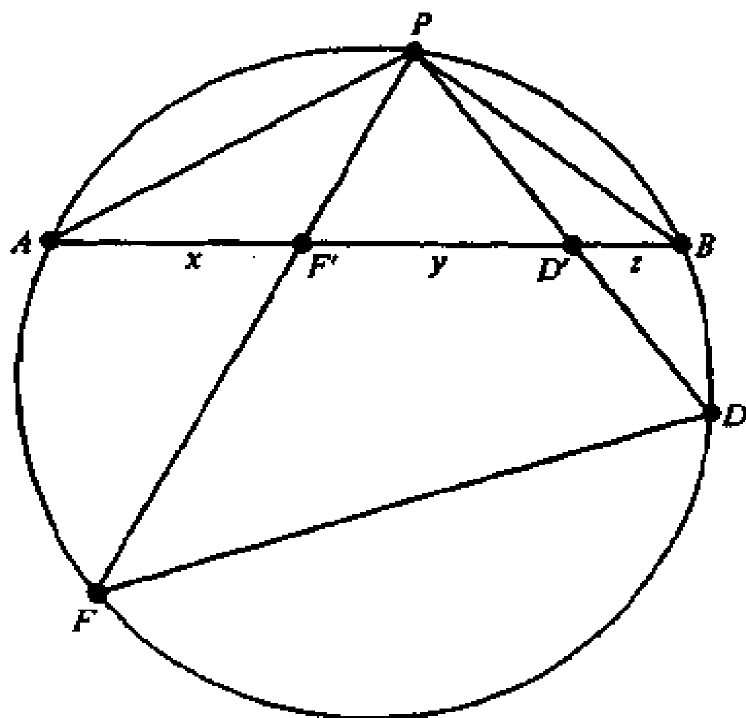


图 9B－13

哈鲁基的证明简洁明快.另一种证法利用交比，更为简单.设 $AB=m$，作 PA 和 PB. 设 AB 交 PF 于 F'，交 PD 于 D'. 因为当 P 点沿着弧 AB 移动时(用 P' 表示动点)，$\angle APF$、$\angle FPD$、$\angle DPB$ 的大小不变，所以线束 $P(AFDB)$ 的交比是常数. 因而，对应的交比 $P(AF'D'B)$，即 $P'(AF'D'B)$，也保持常数. 这样我

们就有

$$\frac{F'A}{F'D}=\frac{BA}{BD'}=\frac{xz}{ym}\quad(\text{更一般地，}=\frac{x'z'}{y'm}.)$$

由此可见，哈鲁基引理实际上相当于沙勒定理：若 A,B,C,D 为圆锥曲线上四个定点，P 是这条圆锥曲线上的动点，那么交比 $P(ABCD)$ 与 P 点在曲线上的位置无关.（见[37].）

沙勒定理或哈鲁基引理对蝴蝶问题的应用，是不言而喻的. 在[36]中，"三翅蝴蝶问题"解答后面，还有一些特别有价值的编者评论.

我们非常高兴，因为蝴蝶问题与以下各位著名人物有关，按照时光倒流方式排列，他们是：

(a) 19 世纪发展射影几何学的名人：沙勒，卡诺(Carnot)，彭斯雷(Poncelet)，日尔刚(Gerganne)，斯陶特(Von Staudt)，斯坦纳(Steiner)，蒙日(Monge)等.

(b) 笛沙格.

(c) 帕普斯.

(d) 欧几里得，在他的失传著作中讲到交比的性质，对此事沙勒有过记载.

我要感谢匹多(Dan Pedoe)，为了我们关于对合的谈话；感谢索韦，他送给我一份 1907 年版法文《几何练习》的拷贝；感谢克拉姆金(Murray Klamkin)，他将我带进数学的主流；感谢特里格(Charles W. Trigg)和戈隆(Solomon W. Golomb)，为了我们的长期友谊和前进中的启示；还要感谢阿基米德，历史上最令人钦佩的[由于科学发现极度兴奋而忘记穿衣跑出浴室的]裸奔者. 我要多谢美国《数学杂志》的名誉编辑沙特施奈德(Doris Schattschneider)，为了她的耐心和她的有价值的评论；还为了她精心选择一位目光敏锐的审稿人，帮助本文去掉了若干粗糙斑点.

参考资料

参考资料根据在文中第一次出现的顺序排列.

[1] Joseph Rosenbaum, W. E. Buker, Robert Steinberg, E. P. Starke, and J. H. Butchert, Solution of Problem E 571, Amer. Math. Monthly, 51(1944), 91.

[2] Question 1029, The Gentleman's Diary, 1815, pp.39 - 40.

[3] Leon Bankoff, Solution of Problem 2426, School Sci. and Math., 55 (1955), 156.

[4] R. A. Johnson, Modern Geometry, Houghton Mifflin, Boston, 1929, p.78 (Reprinted by Dover, New York, 1960, as Advanced Euclidean Geometry).中译本:约翰逊,近代欧氏几何学(单墫译自1929年第一版),上海教育出版社,1999.

[5] Léo Sauvé, The celebrated butterfly problem, Eureka (Canada), 2 (1976), 3 - 5.(杂志 Eureka 后来改名为 Crux Mathematicorum.)

[6] Howard Eves, Fundamentals of Geometry, Allyn and Bacon, Boston, 1964, pp.136 - 137.

[7] Mathematical Questions and Solutions, Educational Times, 11(1865), 67 - 68.

[8] J. S. Mackay, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ⅲ(1884 - 1885), 38.

[9] Miles Bland, Geometrical Problems, Cambridge, 1819, pp.228 - 229; also 3rd ed., 1827, p.228.

[10] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, Geometry Revisited, MAA, 1967, pp.45 - 47. 中译本:考克塞特、格雷策,几何学的新探索(陈维桓译),北京大学出版社,1986.

[11] Mannis Charosh, Solution of Problem 1713, School Sci. and Math., 41 (1941), 684 - 685.

[12] ________, Assoc. of Teachers of Math., N. Y. C., 1(1945), 11.

[13] Arthur Eilberg, Solution of Problem 2419, School Sci. and Math., 55 (1955), 70 - 71.

[14] Ross Honsberger, The butterfly problem and other delicacies, Part Ⅰ, The Two-Year College Math. J., 14(1983), 2 - 5.

[15] Charles F. Pinzka, Problem Solving and Some Problems, Enrichment Mathematics for High School, 28th Yearbook, NCTM, 1963, pp. 179 – 184, problem 14.

[16] Jack Coles, Solution of problem 82 – 3, Ontario Secondary School Math. Bull., 3(1982), 15 – 16.

[17] Riko Winterle, Solution of problem # 2, Ontario Secondary School Math. Bull., 1(1968), 33; also solution by W. Lovsin, pp.34, 17.

[18] Paul Erdös, Solution of problem 75 – 5, Ontario Secondary School Math. Bull., 2(1975), 23 – 24.

[19] M. F. MacGregor, Solution of Problem 1265, School Sci. and Math., 33(1933), 902.

[20] Isadore Chertoff, Solution of Problem 1455, School Sci. and Math., 36 (1936), 1027 – 1028.

[21] Donald Bateman, Solution of problem 949, Mathematics Magazine, 49 (1976), 217 – 218.

[22] M. S. Klamkin, An extension of the butterfly problem, Mathematics Magazine, 38(1965), 206 – 208.

[23] G. D. Chakerian, G. T. Sallee, M. S. Klamkin, On the butterfly property, Mathematics Magazine, 42(1969), 21 – 23.

[24] W. I. Jacobson, The butterfly problem —— extensions, generalizations, Mathematics Magazine, 42(1969), 17 – 21.

[25] Dixon Jones, A double butterfly theorem, Mathematics Magazine, 49 (1976), 86 – 87.

[26] Dan Sokolowsky, Another proof of the butterfly theorem, Ehreka (Canada), 2(1976), 188 – 190.

[27] L. H. Miller, College Geometry, Appleton – Century – Crofts, New York, 1957, pp. 124 – 125.

[28] Kesiraju Satyanarayana, A simple proof of the butterfly problem, Crux Mathematicorum, 7(1981), 292.

[29] Philomathe, Solution of Problem 590, School Sci. and Math., 19 (1919), 279.

[30] Exercices de Géométrie, par F.G. – M. 4th ed., Maison A Mame &

Fils, 1907, Tours, p.535.

[31] Julian Coolidge, A History of Geometrical Methods, Dover Publications, 1963, p.90.

[32] Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique, Desclée de Brouwer et Cie., Paris, 1933. (Two volumes, translated by Paul Ver Eecke). Also: Pappi Alexandrini, Mathematicae Collectiones, Commandino Edition, 1660.

[33] John Casey, A Sequel to Euclid, 6th ed., revised, 1892, p.129.

[34] A. L. Candy, A general theorem relating to transversals and its consequences, Annals of Math., (1896), 175 – 176.

[35] S. R. Conrad, Another simple solution of the butterfly problem, Mathematics Magazine, 46(1973), 278 – 280.

[36] Ronald S. Tiberio, Solution I, and Jordi Dou, Solution II of problem 1187, A Three – Winged Butterfly Problem, Mathematics Magazine, 58(1985), p.115.

[37] Hazel Perfect, Topics in Geometry, Macmillan, N. Y., 1965, p.113.

[38] Howard Eves, A Survey of Geometry, v. 1, Allyn and Bacon, Boston, 1963, Chapters 3 and 6.

[39] H. S. M. Coxeter, The Real Projective Plane, 2nd ed., Cambridge University Press, 1961, Chapter 7.

[40] ______, Projective Geometry, Blaisdell Publishing Co., N. Y., 1964, p.87.

[41] C. V. Durell, Projective Geometry, Macmillan, London, 1952, p.184.

[42] O. Veblen and C. Young, Projective Geometry, v. 1, p.127, p.222.

[43] Heinrich Dörrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, 1965, pp.265 – 272. 中译本:德里,100 个著名初等数学问题(罗保华等译),上海科学技术出版社,1982.

[44] R. M. Winger, Projective Geometry, Dover, 1962, pp.169 – 171.

[45] Exercices de Géométrie, par F.G. – M. 4th ed., Maison A Mame & Fils, Tours, 1907, pp.523 – 525.

[46] The William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and

Solutions: 1938 - 1964, A. M. Gleason, and L. M. Kelly, MAA, 1980, pp.575 – 577. 中译本:普特南数学竞赛(刘裔宏等译),湖南科学技术出版社,1983.

[47] John Wellesley Rusell, An Elementary Treatise on Pure Geometry, Oxford University Press, London, 1905, pp.226 – 229.

附录C　圆锥曲线小史①

自　尚　恕

人民教育出版社出版的《平面解析几何》引言上说："解析几何产生在 17 世纪初期．由于当时生产的发展，各种科学和生产技术都有了很大进步，这就迫切需要解决随着发生的许多数学上的问题．……因而有关圆锥曲线的计算就成为迫切需要．解析几何就是由于这种需要而产生的"．本文就圆锥曲线发展的历史，略作介绍．不足之处在所难免，尚希读者指正．

（一）圆锥曲线研究的起源

圆锥曲线的研究，起源于希腊．它与几何三大问题中的二倍立方问题有关[1]．

几何三大问题曾轰传一时，研究者很多，曾研究过二倍立方问题的希腊学者计有：阿契塔(Archytas，约公元前 428—347)，柏拉图(Plato，约公元前 427—347)，欧多克斯(Eudoxus，约公元前 408—355)及蒙爱启玛斯(Meneachmus，约公元前 375—325)等．蒙爱启玛斯是欧多克斯的门徒，可能受到阿契塔及欧多克斯的启发；他的解法也可能是希腊学者研究的总汇．取三个正圆锥，一为直角，一为锐角，另一个是钝角的，各作一平面垂直于一条母线，并与圆锥相截；称截线为"直角圆锥截线"、"锐角圆锥截

① 译者注：原载《数学通报》1964 年第 2 期．

线"、"钝角圆锥截线";(即今之抛物线、椭圆、一支等轴双曲线)这是最早对圆锥曲线的定名.他用两条抛物线的交点或一抛物线与一双曲线的交点解决二倍立方问题.

蒙爱启玛斯的著作早已散失,他的大部分发明是推测出来的.根据德国学者布莱慈纳德(Bretschneiter, 1808—1878)考证,认为推出"直角圆锥截线"(抛物线)方法如下[2]:

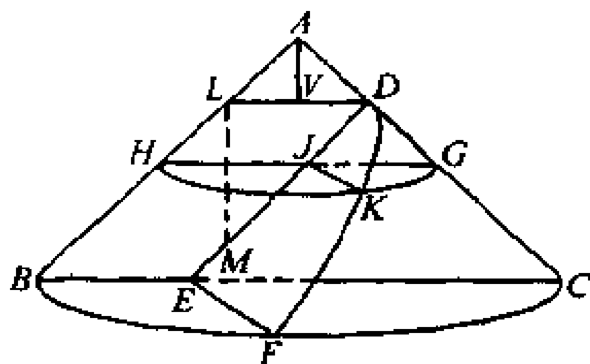


图 9C-1

设直角三角形 BAC(图 1)为直角圆锥轴截面,截面 DEF 垂直于母线 AC,交轴截面于 DE. 在 DE 上任取一点 J,过 J 作正断面 HKG,与 DEF 交于 JK,作 $DL /\!/ HG$,$LM \perp LD$;于是得

$$JK^2 = HJ \cdot GJ = LD \cdot JG = JD \cdot DM.$$

设 $x = JD$, $y = JK$, $p = DM$, 由上式得

$$y^2 = px.$$

布莱慈纳德也认为由锐、钝角圆锥同样地也可推得"锐角圆锥截线"和"钝角圆锥截线".

可见,所谓"蒙爱启玛斯三曲线"——圆锥曲线——起源于公元前 4 世纪.

(二) 圆锥曲线研究在希腊的发展

蒙爱启玛斯之后不久,希腊学者阿利斯塔奥(Aristoeos)著有《论空间轨迹》一书,这书早已失传;根据帕普斯(Pappus, 约 340—?)记载,知道这是一部有关圆锥曲线的论著[3].

公元前 3 世纪，希腊三大学者欧几里得（Euclid）、阿基米德（Archimedes，公元前 287—212）、阿波罗尼（Apollonius，约公元前 260—170）于前人的基础上进一步发展了圆锥曲线的理论.

欧几里得著述很多，除《几何原本》外，其他如《圆锥曲线论》4 卷、《不定设题论》3 卷、《曲面轨迹》2 卷都散失了[4].《圆锥曲线论》大部分资料可能被阿波罗尼纳入自己的《圆锥曲线》一书里了.后两部著作讨论了很多轨迹问题；与现代不同处，只是缺少字母符号及代数运算过程.法国学者沙尔（Chales，1793—1880）曾说："这些著作的遗失，对于解析几何的发展确是一件憾事."[5]

阿基米德著述很多，对圆锥曲线的贡献也大，如他是计算抛物线弓形面积的第一个成功者，椭圆作图所用的辅助圆，圆锥曲线的直径等也都是他的发明[6].

阿波罗尼的《圆锥曲线》共 8 卷，末卷遗失.卷 1 论三种曲线的产生，卷 2 论渐近线、轴及直径，卷 3 论三种曲线的轨迹问题，卷 4 论直线的调和分割，两曲线不多于四个交点，两曲线的位置关系，卷 5 论极大与极小问题，卷 6 论相似圆锥曲线，卷 7 论共轭直径，卷 8 可能是继续论述共轭直径.

阿波罗尼处理圆锥曲线的方法与前人不同，不用三个圆锥，是用一个圆锥，只要改变截面的位置就产生三种曲线（欧几里得、阿基米德可能都知道），也注意到截面垂直于轴时是一圆.他最先发现双曲线是有心曲线，并有两个分支；对圆锥曲线的叙述很接近近代方式.例如（以顶点为原点，轴为横轴的抛物线）任一点横坐标与通径组成的矩形等于与之对应的纵坐标组成的正方形.（以一顶点为原点，长轴为横轴的椭圆或双曲线）任一点纵坐标组成的正方形小于或大于与之对应的横坐标及通径组成的矩形.表示为现代形式，即 $y^2 = px$，$y^2 < px$，$y^2 > px$.根据他的词句，圆锥曲线方程应该是 $y^2 = px$（抛物线），$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$（椭

圆)，$y^2=px+\frac{p}{d}x^2$(双曲线)(其中 p 为通径，d 为与之对应的直径). 可以认为在阿波罗尼时代已经有了文词叙述的圆锥曲线方程.

欧几里得以前，仍然称圆锥曲线为"直角圆锥截线"、"锐角圆锥截线"、"钝角圆锥截线". 阿波罗尼发现这三种曲线可以得自一个圆锥后，旧名称显然不适用了. 由于 $y^2=px$，$y^2<px$，$y^2>px$ 及希腊几何术语，便称抛物线、椭圆、双曲线分别为"παραβολή(适用的)"、"έλλειψις(有亏的)"、"ὑπερβολή(有余的)"[7](前两个名称并非始于阿波罗尼，好像阿基米德曾用过). 当希腊学术传入欧洲时，这些名称便译为拉丁文之"Parabola"、"Ellipse"、"Hyperbola". 17，18 世纪西算输入我国，最初象形地称抛物线、椭圆、双曲线为"圭窦形"、"椭圆形"、"陶丘形"[8]. 后来才改为今之名称.

阿波罗尼以后，希腊对圆锥曲线的贡献显得不多；4 世纪，由于帕普斯的贡献，希腊几何又兴盛起来. 帕普斯是当时著名几何学家，很多著作都失传了，只流传下来他的《数学论丛》后 6 卷(这书共 8 卷，前 2 卷已散失).

由《数学论丛》可以看出他对圆锥曲线有很多贡献；例如卷 8 证明了五点可确定一条圆锥曲线，卷 7 证明了圆锥曲线的焦点－准线－离心率性质. 今将他证明抛物线性质介绍如下：

过定点 C(图 2)向定直线 AB 引垂线 CF，在抛物线上任取一点 D，连结 DC，作 $DE\perp AB$，$DG\perp CF$.

因 $\frac{DE}{DC}=1$ 即 $e=1$，则有

$$DE^2=DC^2.$$

由勾股定理得：$DE^2=GD^2+GC^2$，又因 $DE=GF=GH+HF$，$GC=CH-HG$，故得：$(GH+HF)^2=DG^2+(CH-HG)^2$，整理后即

$$DG^2=HG\cdot(2HC).$$

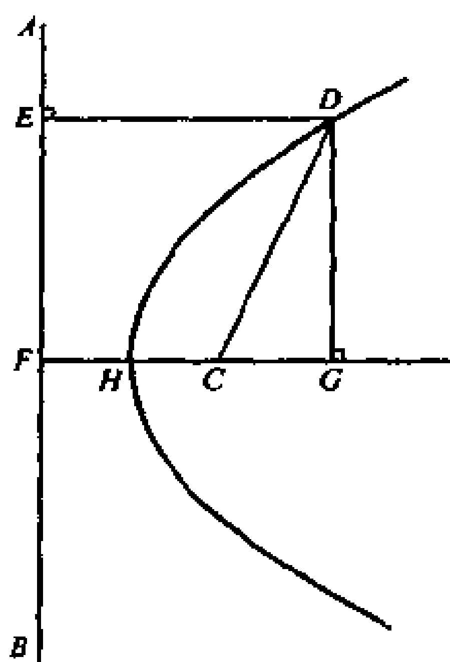


图 9C-2

表示以现代符号，即

$$y^2 = px（其中\ y = DG,\ x = HG,\ p = 2HC）.$$

当 $e < 1$，或 $e > 1$ 时，他也用几何方法给以证明[9]. 在解析几何发明以前的圆锥曲线发展中，这是非常重要的贡献[10].

《数学论丛》卷 7 还有一个著名的轨迹问题：

由一点向 3 或 4 条定直线作垂线（可看为作线段，使夹已知角），（若有 3 条定直线）其中两条垂线之积与第三条垂线的平方成定比；（若有 4 条定直线）其中两垂线之积与另两垂线之积成定比；求该点轨迹[11].

最初，帕普斯求得这一轨迹是圆锥曲线，然后考虑到 6 条定直线时，认为是一曲线；多于 6 条时，便含糊其词了；他可能想推出这问题的一切情形，但是没有完成. 这问题既可推广到 n 条定直线，也可把数、形结合在一起，因此引起后人的兴趣，研究者很多，例如法国数学家费尔马（Fermat，1601—1665）、笛卡儿（Descartes，1596—1650）等人都研究过.

（三）圆锥曲线在中古时期的研究情况

中古时期，希腊文化渐有衰退之势，文化中心渐渐移到印度、阿拉伯等地．就数学来说，也有这种趋势．印度在代数、三角方面有很多进展，但很少发现印度关于探讨圆锥曲线方面的资料[12]．

9 世纪之初，伊斯兰教学者将希腊一些著作译为阿拉伯文后，希腊文化以及对圆锥曲线的论著便源源输入阿拉伯，有些学者研究了圆锥曲线与物理学中某些关系．也有些学者研究用双曲线 $xy = c^2$ 及抛物线 $y^2 = cx + ax$ 解 $x^3 + ax^2 = c^3$；和用双曲线 $x(b \pm y) = bc$ 及圆 $y^2 = (x \pm a)(c - x)$ 解 $x^3 \pm ax^2 + b^2x = b^2c$ 的方法．

11，12 世纪，希腊文化经阿拉伯传入欧洲，在欧洲，由于缩写符号及运算符号的发展，代数学也有了一定的进展；很多人都用圆锥曲线图解三次方程．这种解法大约延续了三、四百年之久．

基特尔狄（Ghetaldi，1566—1627）是法国著名数学家韦达（Viète，1540—1603）的门徒，他一面搜集阿波罗尼的著作，一面继续韦达的研究；于 1630 年出版了《混合数学的解》，这是当时第一部较完整的代数几何学．

由于韦达的教导，基特尔狄常用代数方法研究几何问题；例如在他的遗著中曾由“已知三角形的底，两腰之差等于底边一半，求作三角形”得到一个恒等式，认为这种三角形有无限多个；但是没有注意到第三顶点的轨迹是双曲线[13]．

自 5，6 世纪以来，由于科学、技术特别是天文学的需要，有关计算的科学得到重视；字母符号及运算符号也相应地发展起来，在算术、代数及三角方面显示出巨大的成就．又因代数的发展，人们（例如韦达）把 x 看为线段的长，x^2 看为面积，x^3 看为体积，因而在几何学尤其是圆锥曲线方面，除了把希腊的成果译成代数语言传到后世外，又促进了代数几何学的发生和发展．这就给解析几何的产生准备了条件．

（四）圆锥曲线研究在近代的进展

近代之初，由于生产的发展以及各种自然科学如天文学、力学、光学的发展，促进了数学的发展.

德国天文学家开普勒（Kepler，1571—1630）于1609年发现天体运行轨道是椭圆，也发现圆锥曲线的焦点及离心率，并指出抛物线还有一个在无限远处看不见的焦点.他还推测平面截圆锥于无限远时，双曲线可变为抛物线，无限大的椭圆就是圆，最锐的双曲线将退缩成一对直线，最钝的双曲线是抛物线，最锐的椭圆是抛物线，最钝的椭圆是圆，并于1604年给出三种曲线的一般拉线作图法.意大利物理学家伽利略（Galileo，1564—1642）由抛掷石子推出弹道是抛物线.法国学者迈多尔日（Mydorge，1585—1647）发展了圆锥曲线在光学中的应用.

17世纪初期，解析几何随着费尔马及笛卡儿的著作产生了.

费尔马是法国著名律师，很喜爱数学，对古代几何尤感兴趣.笛卡儿是位哲学家；他们两人采取不同方向继续了韦达的工作，各自独立地发明了解析几何.费尔马用韦达的符号研究了轨迹；笛卡儿采取韦达以几何图解代数方程的方针导出了他的名著《几何学》.

费尔马的《空间与平面轨迹入门》（1679）比笛卡儿的《几何学》（1637）出版较晚；后人多疏忽了费尔马对解析几何的贡献.

《空间与平面轨迹入门》大部分论述直线、圆及圆锥曲线，并使用了只限于正值相当于坐标的图示；此外，还正确地叙述了解析几何的基本原理：

"凡含有两个未知数的方程，总可确定一个轨迹，并能绘出一条直线或曲线"[14].

他知道一次方程的轨迹是直线，并用韦达的符号研究二次方程，指出"*A* in *E* aeq. *z* pl."（即 $xy = k^2$）是双曲线，也指出 $x^2 = dy$，$y^2 = dx$，$b^2 \pm x^2 = dy$ 是抛物线，$x^2 + y^2 + 2dx + 2ry =$

b^2 是圆，$b^2 - x^2 = ky^2$ 是椭圆，$b^2 + x^2 = ky^2$ 是双曲线. 还考虑了完全二次方程，进一步指出 $d^2 + xy = bx + sy$ 是双曲线；可以看出，他已经注意到坐标的平移，但没有把这种变换形成公式.

费尔马既把圆锥曲线看为圆锥的平截线，也看为平面轨迹，又看为二次方程的图象. 也就是说他用三种不同的观点给圆锥曲线建立了一套杰出的理论基础.

笛卡儿《几何学》是附在他的哲学著作之后于 1637 年出版. 他想用一种方法能解一切几何问题，便把韦达的符号加以扩充，认为 x 表示线段，x^2, x^3, x^4, …表示线段的方幂；用他创造的坐标概念把方程看为平面曲线，再以曲线图解代数方程. 虽然他称之为《几何学》，由内容上看，并不是解析几何，实际上是一部几何代数学.

笛卡儿《几何学》共 3 卷，卷 1 讨论直线及圆的作图问题；他没有采用坐标，也没有用两轴，却用严密的文词叙述了坐标概念. 卷 2 讨论曲线的性质，也将帕普斯轨迹问题作了研究. 卷 3 是论图解问题，详细地讨论了三次以上方程的图解问题[15].

笛卡儿《几何学》出版后，了解者不多，流行不广. 当时法国最著名的数学家洛拜尔瓦(Roberval, 1602—1675)为了介绍笛卡儿《几何学》，著有《论方程的知识》，这书的宗旨与笛卡儿的差不多，也是以轨迹图解方程.

英国数学家华里司(Wallis, 1616—1703)在“以新方法论圆锥曲线”(1655)一文中，不是用平截线也不是用运动概念而是第一个用方程定义圆锥曲线的. 例如“当平面图形具有 $e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}$ (e, d 为由顶点至一点的纵、横坐标，l 为通径，t 为“直径”或轴)时，称为椭圆[16]”. 也用下列方程

$$p^2 = ld, \quad h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$$

(p, h 分别为抛物线及双曲线的纵坐标)定义了抛物线及双曲线.

在 1659—1661 年，笛卡儿《几何学》第二版问世，书末附有一些注解文章. 第一篇是拜瑙(F. de Beaune, 1601—1652)的，他逐节作了阐述，并以 $y^2 = xy + bx$，$y^2 = -2dy + bx$，$y^2 = bx - x^2$ 表示双曲线、抛物线、椭圆；又按 $xy + bx + cy = df$ 系数讨论了 17 种情形. 其次是舒顿(Schooten, 1615—1660)的，他的文章中有一次、二次方程的研究，推出了坐标平移及旋转公式以及渐近线方程；也阐论了图解方程问题. 此外还有胡鼎(Hudden 约 1633—1704)的注解文章[17]等. 由于这些文章的注解及介绍，了解者渐多，笛卡儿《几何学》才广泛地流传起来.

18 世纪，牛顿(Newton, 1642—1727)正确地运用了负坐标及横纵轴，从此改变了以前对负坐标概念不清及使用单一轴的现象. 在他所著《光学》(1704)中，推证了圆锥曲线的切线问题，曲率问题以及在光学中的应用等[18].

1705，1707 年法国出版了两部著作，一为居西尼(N. Guisnee, ？—1718)的《代数在几何中的应用》，一为洛比达(L'Hospital, 1661—1704)的《圆锥曲线解析论》. 前一书似是第一个以 a，b 表示有心曲线的半轴，第一次使用直交坐标系. 后一书对一般二次方程进行了讨论，曾明确地指出，若 y^2 系数为 1，当 xy 系数之半大于、等于、小于 x^2 的系数时，分别是三种圆锥曲线. 此外，洛比达还用焦点－准线定义了圆锥曲线，并给出标准方程[19].

1748 年出版了英国学者马克劳林(Maclaurin, 1698—1746)，意大利女数学家渥尼西(M. Agnesi, 1718—1799)及彼得堡科学院院士欧拉(Euler, 1707—1783)等人的著作. 由于这些著作给圆锥曲线带来很多贡献，可以说这一年是解析几何学史上最光辉的一年.

欧拉在《分析引论》(1748)中，建立了直交坐标，斜交坐标及极坐标概念，给出坐标的变换公式及转轴公式，欧拉对圆锥曲线的论证十分正确，他由一般二次方程 $0 = \alpha + \beta x + ry + \delta x^2 + \varepsilon xy$

$+\xi y^2$ 着手，系统地研究了各种情形．并按参数方程及极方程论述了圆锥曲线．

另一方面由 $y^2=2cx-\frac{c(2d-c)x^2}{d^2}$（$c=\frac{b^2}{a}$为通径之半，$d=a-\sqrt{a^2-b^2}$为顶点至焦点的距离）推出 $a=\frac{d^2}{2d-c}$；$b=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$；当 $2d=c$ 时，$a=\infty$，$b=\infty$，则得到 $y^2=2cx$，于是他认为抛物线得自椭圆[20]．

《分析引论》不但对圆锥曲线论述得十分完备，对于曲面及一般曲线的研究也很全面．正如斯特洛伊克（Struik）说："《分析引论》是解析几何学的第一部课本"[21]．

18—19 世纪，由于生产的发展，自然科学的进步，圆锥曲线的研究也成为迫切需要．在这一时期中出版了很多教科书、小册子，各种杂志也常发表有关圆锥曲线的论文．

法国学者腊梅（Lamé，1795—1870）有两个贡献：用一个字母表示整个方程，如 $E=0$，$E'=0$．并认为若 $E=0$，$E'=0$ 为同次轨迹，用"倍数"把它们串联起来 $mE+m'E'=0$，就得过 $E=0$，$E'=0$ 交点的曲线[22]．虽然这两个贡献不大，由于这种写法简捷，给曲线族的研究带来极大方便．

19 世纪中叶，由于创立了各种坐标制，又把圆锥曲线的理论推前一步．

德国数学家普吕克（Plücker，1801—1868）于《空间几何》（1868—1869）一书中，把腊梅的"倍数"m，m' 扩充为参数，并指出 $C_1+\lambda C_2=0$ 为圆锥曲线族．于 1828 年介绍了齐次坐标，发展了曲线的无限远性质．又于 1831 年论证了笛卡儿坐标与齐次坐标的关系．也提出直线坐标、平面坐标及对偶理论[22]．因此使得曲线的概念解析地发展起来．他又借助于虚坐标把圆锥曲线的性质推广起来．

19 世纪末叶，解析几何受到分析学及各种科学的影响，它

的内容发展得十分丰富;就以圆锥曲线来说,不仅在理论上达到极高峰,在实用上也得到充分的利用.

(五) 圆锥曲线学说传入我国的历史

圆锥曲线学说在明末随着天文历算第一次输入我国.《测量全义》(1631)、《恒星历指》(1631)、《交食历指》(1632)、《测天约说》(1633)里都介绍了圆锥曲线的一些片断知识.因为这些都是历算书籍,对于圆锥曲线的论说既不详细,也不完备,译名也不统一.如椭圆,《测量全义》称为椭圆形,《恒星历指》称为椭圆,也称为斜圆;《交食历指》则称为长圆,《测天约说》上卷测量学第一题记为:"长圆形者,一线作圈,而首至尾之径大于腰间径;亦名曰瘦圈界,亦名曰椭圆".

这些书籍不是把椭圆看为圆锥的截线,是看为圆柱的斜截线.如《测天约说》中载有:"或问此形从何生? 答曰:如一长圆柱,横断之,其断处两面皆圆形.若断处稍斜,其两面必稍长,愈斜愈长;或称卵形,亦近似,然卵两端大小不等,非其类也".《交食历指》卷 7 及《测量全义》卷 5 也有类似记载.《测量全义》既记载了椭圆产生自圆柱,也记载了圆锥曲线得自圆锥.如卷 6 有:"截圆角体法有五:从其轴,平分直截之,所截两面为三角形,一也.横截之,与底平行,截面为平圆形,二也.斜截之,与边平行截面为圭窦形(顶不锐,近底之两腰稍平行),三也.直截之,与轴平行,截面为陶丘形(顶曲,渐下渐直,底两旁为锐角),四也.无平行,任斜截之,截面为椭圆形,五也"(图 3).

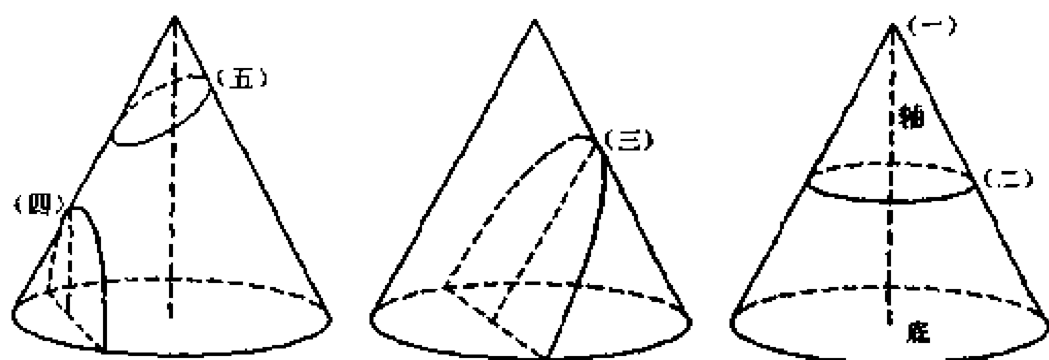


图 9C-3

清康熙 13 年(1674)二月呈进了南怀仁(Ferdinard Verbiest, 1623—1688)的《灵台仪象志》,其中有应用与两定点距离的和为一常数的椭圆拉线作图法.

《数理精蕴》(1723)上编卷 3 及下编卷 20 称为椭圆,也称为鸭蛋形,并记载了椭圆面积为 πab(a,b 分别为长短轴之半),但未有证明.

由于天文历算需要,由明安图等人于乾隆 7 年(1742)编成《历象考成后编》,其中载有椭圆作图法及许多性质,并证明了椭圆切线定理及其面积.

清中叶,研究西算者略有增加,如董祐诚(1791—1823)、徐有壬(1800—1860)、项名达(1789—1850)、戴煦(1805—1860)等对椭圆的周长都有一定研究,其中最著名的是项名达,在他的《椭圆求周术》(1848 年写成 1875 年出版)中,论证了椭圆周长.《椭圆求周术》是中算家在圆锥曲线方面第一部独立的著作.虽是用初等数学方法求得椭圆周长,但与近代算式相符合[23].

项名达之后,中算家李善兰(1811—1882)与伟烈亚力(Alexender Wylie, 1815—1887)译罗密士(Loomis, 1811—1899)《代微积拾级》(1859)18 卷.同治五年(1866)又与艾约瑟(Joseph Edkin, 1825—1727)译《圆锥曲线说》3 卷.他又著《椭圆拾遗》3 卷.用几何方法论证了椭圆的一些性质.

清末华蘅芳(1833—1902)与付兰雅(J. Fryer, 1839—?)译华里司《代数术》(1873)25 卷,其中卷 23“方程界线”介绍了圆锥曲线的一些概念和性质.

光绪 16 年(1890)江衡与付兰雅译哈司韦《算式集要》4 卷,书中记载了圆锥曲线的一些计算公式.

这就是第二次输入我国圆锥曲线的情形.这些书籍都简略地介绍了抛物线、椭圆、双曲线的性质.除《代微积拾级》及《代数术》以外,其他各书都是用综合几何的语气叙述的.

明清时期,虽然输入我国一些圆锥曲线知识,因为流传不

广,所以解析几何及圆锥曲线学说的研究在我国发展得比较迟缓.清末废科举立学堂,解析几何列为学校必修科目后,圆锥曲线研究在我国才较广泛地流传开来.

参 考 文 献

[1] 曹丹文译,Cajori,初等算学史,第 50 页,1931.

[2] G. J. Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid, 第 166—170 页, 1889.

[3] Federige 译,Pappus, Mathematical Collectiones, 第 204—445 页,1660.

[4] Heath, Greek Mathematics, 卷 1,第 430—440 页,(1921).

[5] Boyer, History of Analytic Geometry, 第 22 页,1956.

[6] Heoth, Greek Mathematics, 卷 2,第 122—126 页,(1921).

[7] 朱鼎勋,"圆锥曲线",数学通报,1962 年,第 3、4 期.

[8] 徐光启等编译,测量全义,卷 6(1631).

[9] Federige 译,Pappus, Mathematical Collectiones, 第 444 页,1660.

[10] Coolidge, A History of Conic sections and quadrio surfaces, 第 9 页, 1945.

[11] Federige 译,Pappus, Mathematical Collectiones, 第 245—9 页,1660.

[12] Smith, The Geometry of the Hindus, Isis 卷 5,第 197—204 页,1913.

[13] Boyer, History of Analytic Geometry,第 67 页,1956.

[14] Boyer, History of Analytic Geometry, 第 75 页,1956.

[15] Descartes, Geometry, 1659.

[16] Вилеитнер, История Математики от Декарта до конца 19 столетия, 第 227 页,1960.

[17] Descartes, Geometry, 第 107—345 页,1659.

[18] Newton, Optice. 1706.

[19] Goolidge, A history of conic sectiones and quadric surfaces, 第 76—78 页,1945.

[20] Euler, introductio in analysin infinitorum, 卷 2,(1748).

[21] 关娴译,Struik,数学简史,第 101 页,1956.

[22] Boyer, History of Analytic Geometry, 第 233—236 页,1956.

[23] 李俨,中算史论丛,第三集,第 519—537 页,1955.

索引

（译名后的数码为原书页码）

A

Adams's property 亚当斯性质 16, 57, 97

abscissa 横标线 3

auxiliary circle 辅助圆 38

axial plane 轴面 121, 126

axis 轴 1, 121, 126

axis of a parabola 抛物线的轴 3

B

base line 基线 26

Brianchon's theorem 布列安桑定理 207

C

centre of the ellipse 椭圆的中心 36

centre of the hyperbola 双曲线的中心 79

cone 锥面 126

conjugate diameters 共轭直径 66, 109

conjugate hyperbola 共轭双曲线 102

corresponding chords 对应弦 38

corresponding points 对应点 38

cylinder 柱面 121

D

diameter 直径 20, 62, 108

director circle 准圆 52, 145

directrix 准线 1, 33, 74

double ordinates 双纵标线 7

E

eccentricity 离心率 33, 74

ellipse 椭圆 33

equi-conjugate diameters 等共轭直径 166

equilateral hyperbola 等轴双曲线 81

extremities of a diameter 直径的端点 110

F

focal distance 焦半径 3

focal chords 焦点弦 7

focal sphere 焦球 121, 126

focus 焦点 1, 33, 74

H

hyperbola 双曲线 74

L

latus rectum 正焦弦 6, 46, 88

length of the diameter 直径的长度

108

M

major axis 长轴 36

minor axis 短轴 36

N

normal 法线 12

O

ordinate 纵标线 3

ordinates to the diameter 直径的纵标线 21,62,108

P

parabola 抛物线 1

Pascal's theorem 巴斯加定理 207

plane of projection 射影面 26

projection of a line 线的射影 26

projection of an area 区域的射影 26

projection of the point 点的射影 26

R

rectangular hyperbola 直角双曲线 81

rectilinear asymptote 渐近线 81

right circular cone 正圆锥面 126

right circular cylinder 正圆柱面 121

S

semi-conjugate axis 共轭半轴 79

subno rmal 次法线 14

subtangent 次切线 13

supplemental chords 互补弦 68, 110

symmetrical with respect to a straight line 关于一条直线对称 1

T

tangent 切线 8

transverse axis 横轴 79

V

vertex 顶点 1,126

vertex of a parabola 抛物线的顶点 3